# ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO TÍNH CHẤT CO SUY RỘNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN PHI TUYẾN PHỤ THUỘC THỜI GIAN CÓ CHẬM

• Nguyễn Thành Nghĩa(*), Huỳnh Thị Kim Loan(*)

**Tóm tắt**

*Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu bài toán co suy rộng của hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm. Từ đó, chúng tôi phát triển kĩ thuật đã có để chứng minh một số điều kiện mới cho tính chất co suy rộng của lớp hệ này. Các kết quả đạt được là mở rộng tổng quát của một số kết quả đã có gần đây của các tác giả khác. Một ví dụ được đưa ra nhằm minh họa cho kết quả đạt được.*

*Từ khóa: Co suy rộng; co toàn cục; phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm.*

## 1. Mở đầu

Phương trình sai phân có nhiều ứng dụng trong các mô hình toán học và thực tế ([2], [3]). Các bài toán về tính chất định tính của nghiệm của các hệ phương trình sai phân như tính chất ổn định, hút, điều khiển được, bị chặn, co… đã và đang thu hút các nhà nghiên cứu trong suốt những thập niên vừa qua (xem [1], [2], [3], [4], [5], [6] và một số tài liệu tham khảo trong các bài báo). Hệ phương trình sai phân có tính chất co nếu "khoảng cách" giữa các nghiệm bất kỳ của hệ dần về không khi thời gian dần ra dương vô hạn ([6]). Năm 1998, Lohmiller và Slotine [4] đã đưa ra một số mô hình thực tế về cơ học chất lỏng dẫn đến việc nghiên cứu bài toán về tính chất co của các hệ động lực. Trong đó, các tác giả đã đưa ra nhiều điều kiện cho tính co của hệ phương trình sai phân thường và hệ phương trình vi phân thường. Các kết quả này sau đó được ứng dụng vào một số mô hình bài toán điều khiển và thiết kế quan sát đối với một số hệ động lực.

Các bài toán về tính chất co của hệ động lực sau đó được tiếp tục nghiên cứu, phát triển bởi nhiều nhóm tác giả (xem [1], [6], [7] và một số tài liệu tham khảo trong đó). Gần đây, bài toán về tính chất co cho hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm với biến rời rạc ([6]) và hệ phương trình vi phân phiếm hàm ([7]) lần lượt đã được nghiên cứu. Trong đó, nhóm tác giả đã đưa ra nhiều điều kiện đủ, tường minh cho tính chất co của hệ phương trình sai phân phi tuyến và hệ phương trình vi phân phiếm hàm. Tuy nhiên, có một số lớp hệ phương trình có các nghiệm chỉ gần nhau với một khoảng cách nào đó mà khoảng cách không dần về không khi thời gian dần ra vô hạn. Do vậy, các lớp hệ này không áp dụng được các kết quả về tính co đã được công bố trong nhiều tài liệu trước đây, chẳng hạn [1], [4], [6], [7]. Bài báo này đóng góp một phần vào giải quyết vấn đề mở nêu trên.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm co thành khái niệm tổng quát hơn là co suy rộng, từ đó chúng tôi cải tiến kĩ thuật chứng minh trong [6] để chứng minh nhiều điều kiện co suy rộng của nghiệm đối với một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm, với chậm là các hàm phụ thuộc thời gian. Các kết quả đạt được là mở rộng tổng quát của một số kết quả đã có trước đây.

Sau đây chúng tôi trình bày một số quy ước và kí hiệu được sử dụng trong suốt bài báo này. Gọi $\mathbb{Z}$ là tập hợp tất cả các số nguyên và kí hiệu $\mathbb{Z}_+ := \{k \in \mathbb{Z}:\ k \ge 0\}$. Với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+, k_1 \le k_2$, kí hiệu $\mathbb{Z}_{[k_1,k_2]} := [k_1,k_2] \cap \mathbb{Z}_+$. Gọi $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ lần lượt là trường các số thực và trường các số phức. Với hai số nguyên dương $l,\ q$, kí hiệu $\mathbb{R}^{l\times q}$, $\mathbb{R}_+^{l\times q}$ lần lượt là tập hợp các ma trận thực và tập hợp các ma trận thực không âm cỡ $l\times q$. Với hai ma trận thực $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l\times q}$, ta qui ước bất đẳng thức giữa $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ như sau: $A \ge (\le, >>, <<) B$ tương đương với $a_{ij} \ge (\le, >, <) b_{ij}$, với mọi $i \in \underline{l},\ j \in \underline{q}$. Cách hiểu tương tự khi so sánh hai véctơ. Chuẩn của ma trận $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được hiểu là chuẩn toán tử (operator norm) và được xác định bởi

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

(**) Trường Đại học Thủy Lợi - Cơ sở 2.

$\|A\|:=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|$. Cho $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, nếu $|A|\le B$ thì $\|A\|\le\|B\|$. Với $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, *bán kính phổ* (spectral radius) của $A$ được xác định bởi $\rho(A)=\max\{|\lambda|:\ \lambda\in\mathbb{C},\ \det(\lambda I_n-A)=0\}$.

Tính chất sau đây của ma trận không âm được sử dụng trong phép chứng minh một trong các kết quả của bài báo:

**Bổ đề 1.1** ([5, Lemma 1.1]). Cho ma trận $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$. Các khẳng định sau là tương đương

(i) $\rho(A)<1$;

(ii) $\exists p\in\mathbb{R}^n, p>>0: Ap<<p$;

(iii) $(I_n-A)^{-1}\ge 0$.

**2. Điều kiện cho tính co suy rộng của hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm**

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu điều kiện co suy rộng của lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm dưới dạng sau

$$x(k+1)=H\big(k;x(k),x(k-\tau_1(k)),...,x(k-\tau_m(k))\big),\ k\ge k_0,\quad (2.1)$$

trong đó, $H(.;.,...,.):\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ là hàm cho trước và $\tau_i(k):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+, i\in\mathbb{Z}_{[1,m]}$ là các hàm chậm cho trước thỏa điều kiện $0<\tau_i(k)\le\tau$, với mọi $k\in\mathbb{Z}_+$, với $\tau\in\mathbb{Z},\tau>0$.

Xét hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian (2.1). Gọi $S$ là tập tất cả các hàm điều kiện đầu $\phi:\mathbb{Z}_{[-\tau,0]}\to\mathbb{R}^n$ và $\|\phi\|:=\max\{\|\phi(k)\|:k\in\mathbb{Z}_{[-\tau,0]}\}$, với mỗi $\phi\in S$.

Với $k_0\in\mathbb{Z}_+$ cố định và hàm $\phi\in S$, hệ (2.1) có duy nhất nghiệm, ký hiệu là $x(.;k_0,\phi)$, nghiệm này thỏa mãn điều kiện đầu

$$x(j+k_0)=\phi(j),\ j\in\mathbb{Z}_{[-\tau,0]}.\quad (2.2)$$

**Định nghĩa 2.1** Hệ phương trình (2.1) được gọi là *co suy rộng* (generalized contractive) nếu tồn tại $M>0,\ \varepsilon>0,\ \lambda\in[0,1)$ sao cho

$$\|x(k;k_0,\varphi)-x(k;k_0,\psi)\|\le M\lambda^{k-k_0}\|\varphi-\psi\|+\varepsilon,\quad (2.3)$$

với mọi $k\ge k_0,\varphi,\psi\in S$, trong đó, $(\varphi-\psi)(k):=\varphi(k)-\psi(k),k\in\mathbb{Z}_{[-\tau,0]}$.

Khi bất đẳng thức (2.3) đúng với $\varepsilon=0$ thì hệ (2.1) được gọi là là *co* (contractive). Nhiều điều kiện cho tính chất co của các hệ phương trình sai phân đã được nghiên cứu trong [4], [6].

Sau đây chúng tôi trình bày điều kiện cụ thể cho tính co suy rộng của hệ phương trình sai phân (2.1).

**Định lí 2.2.** *Giả sử tồn tại* $A_i(.):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}_+^{n\times n},i\in\mathbb{Z}_{[0,m]}$ *và* $g:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^{n(2m+2)}\to\mathbb{R}_+^n$, *với* $g$ *bị chặn trên miền* $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^{n(2m+2)}$ *sao cho*

$$|H(k;u_0,...,u_m)-H(k;v_0,...,v_m)|\le\sum_{i=0}^m A_i(k)|u_i-v_i|+g(k;u_0,...,u_m,v_0,...,v_m),\quad (2.4)$$

*với mọi* $k\in\mathbb{Z}_+$ *với mọi* $u_i,v_i\in\mathbb{R}^n,i\in\mathbb{Z}_{[0,m]}$. *Khi đó (2.1) là co suy rộng nếu tồn tại véctơ* $p\in\mathbb{R}^n,p=(p_1,...,p_n)^T>>0$ *và* $0<\beta<1$ *sao cho điều kiện sao đây được thỏa mãn*

$$A_0(k)p+\sum_{i=1}^m A_i(k)\beta^{-\tau_i(k)}p\le\beta p,\ \forall k\in\mathbb{Z}_+.\quad (2.5)$$

*Chứng minh*. Với mọi $\varphi,\psi\in S$, ta cần chứng minh tồn tại $M>0,\ \varepsilon>0,\ \lambda\in[0,1)$ sao cho

$$\|x(k;k_0,\varphi)-x(k;k_0,\psi)\|\le M\lambda^{k-k_0}\|\varphi-\psi\|+\varepsilon,\ \forall k\ge k_0,$$

với mọi $k\in\mathbb{Z},k\ge k_0,\varphi,\psi\in S$. Từ điều kiện ban đầu (2.2), ta có

$$|x(j+k_0;k_0,\varphi)-x(j+k_0;k_0,\psi)|=|\varphi(j)-\psi(j)|,\forall j\in[-\tau,0].$$

Khi đó, từ cách xác định của $\|\varphi-\psi\|$, ta có

$$\begin{aligned}&|x(j+k_0;k_0,\varphi)-x(j+k_0;k_0,\psi)|\\&=|\varphi(j)-\psi(j)|\\&\le\|\varphi-\psi\|e_1,\end{aligned}$$

với $e_1=(1,1,...,1)^T\in\mathbb{R}^n,\forall j\in[-\tau,0]$. Hay

$$|x(k;k_0,\varphi)-x(k;k_0,\psi)|\le\|\varphi-\psi\|e_1,\forall k\in\mathbb{Z}_{[k_0-\tau,k_0]}.$$

Suy ra

$$|x(k;k_0,\varphi)-x(k;k_0,\psi)|\le\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min_{1\le i\le n}p_i},\forall k\in\mathbb{Z}_{[k_0-\tau,k_0]},\quad (2.6)$$

với $p$ được xác định trong (2.5).

Đặt $u(k)=\lambda^{k-k_0}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}$, trong đó $\lambda=\beta$ ($\beta$ được xác định trong (2.5)) và

$$K=\frac{1}{1-\beta}\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{(k,u_0,\dots,u_m,v_0,\dots,v_m)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^{n(2m+2)}}\{g_i(k,u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)\}\right\}<\infty.$$

Tiếp theo, ta cần chứng minh

$$|x(k;k_0,\varphi)-x(k;k_0,\psi)|\le u(k),\forall k\ge k_0-\tau. \quad (2.7)$$

Từ (2.6), ta có

$$\begin{aligned}&|x(k;k_0,\varphi)-x(k;k_0,\psi)|\\ &\le\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}\\ &\le u(k),\forall k\in\mathbb{Z}_{[k_0-\tau,k_0]}.\end{aligned}$$

Tiếp tục, bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh (2.7) đúng với mọi $k\ge k_0$. Đặt $x(.)=x(.;k_0,\varphi),\bar{x}(.)=\bar{x}(.;k_0,\psi)$. Giả sử (2.7) đúng với $k_1\in\mathbb{Z}_+$, tức là

$$|x(k)-\bar{x}(k)|\le u(k),\ \forall k\in\mathbb{Z}_{[k_0-\tau,k_1]}. \quad (2.8)$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$|x(k_1+1)-\bar{x}(k_1+1)|\le u(k_1+1).$$

Thật vậy, từ (2.1), (2.4) và (2.8) ta có

$$\begin{aligned}&|x(k_1+1)-\bar{x}(k_1+1)|\\ &\le A_0(k_1)|x(k_1)-\bar{x}(k_1)|+\sum_{i=1}^m A_i(k_1)|x(k_1-\tau_i(k_1))-\bar{x}(k_1-\tau_i(k_1))|\\ &+g(k_1,x(k_1),\dots,x(k_1-\tau_m(k_1)),\bar{x}(k_1),\dots,\bar{x}(k_1-\tau_m(k_1)))\\ &\le A_0(k_1)u(k_1)+\sum_{i=1}^m A_i(k_1)u(k_1-\tau_i(k_1))\\ &+g(k_1,x(k_1),\dots,x(k_1-\tau_m(k_1)),\bar{x}(k_1),\dots,\bar{x}(k_1-\tau_m(k_1)))\\ &=A_0(k_1)\left[\lambda^{k_1-k_0}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}\right]+\\ &+\sum_{i=1}^m A_i(k_1)\left[\lambda^{k_1-\tau_i(k_1)-k_0}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}\right]\\ &+g(k_1,x(k_1),\dots,x(k_1-\tau_m(k_1)),\bar{x}(k_1),\dots,\bar{x}(k_1-\tau_m(k_1)))\\ &=\lambda^{k_1-k_0}\|\varphi-\psi\|\left(A_0(k_1)+\sum_{i=1}^m A_i(k_1)\lambda^{-\tau_i(k_1)}\right)\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+\\ &+K\left(A_0(k_1)+\sum_{i=1}^n A_i(k_1)\lambda^{-\tau_i(k_1)}\right)\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+\\ &+g(k_1,x(k_1),\dots,x(k_1-\tau_m(k_1)),\bar{x}(k_1),\dots,\bar{x}(k_1-\tau_m(k_1)))\\ &\le\lambda^{k_1-k_0}\|\varphi-\psi\|\beta\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+\\ &K\left(A_0(k_1)+\sum_{i=1}^m A_i(k_1)\lambda^{-\tau_i(k_1)}\right)\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}\\ &+g(k_1,x(k_1),\dots,x(k_1-\tau_m(k_1)),\bar{x}(k_1),\dots,\bar{x}(k_1-\tau_m(k_1)))\\ &\le\lambda^{k_1+1-k_0}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K\beta\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+\\ &+g(k_1,x(k_1),\dots,x(k_1-\tau_m(k_1)),\bar{x}(k_1),\dots,\bar{x}(k_1-\tau_m(k_1)))\\ &\le\lambda^{k_1+1-k_0}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K\beta\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K(1-\beta)\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}\\ &=\lambda^{k_1+1-k_0}\|\varphi-\psi\|\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}+K\frac{p}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}\\ &=u(k_1+1).\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có

$$|x(k)-\bar{x}(k)|\le u(k),\ \forall k\ge k_0-\tau.$$

Suy ra

$$\|x(k)-\bar{x}(k)\|\le\|u(k)\|\le M\lambda^{k-k_0}\|\varphi-\psi\|+\varepsilon,$$

với $M=\frac{\|p\|}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}$ và $\varepsilon=K\frac{\|p\|}{\min\limits_{1\le i\le n} p_i}$. Vậy hệ (2.1) là co suy rộng. □

**Hệ quả 2.3.** *Giả sử tồn tại* $A_i(.):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}_+^{n\times n},i\in\mathbb{Z}_{[0,m]}$ *và* $g:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^{n(2m+2)}\to\mathbb{R}_+^n$, *với* $g$ *là hàm bị chặn trên miền* $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^{n(2m+2)}$ *sao cho* (2.4) *được thỏa mãn. Khi đó,* (2.1) *là co suy rộng nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*

*(i) Tồn tại* $p\in\mathbb{R}^n, p>>0$ *và* $0<\delta<1$ *sao cho*

$$\sum_{i=0}^m A_i(k)p\le\delta p,\ \forall k\in\mathbb{Z}_+. \quad (2.9)$$

*(ii) Tồn tại một ma trận* $M\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, $\rho(M)<1$ *sao cho*

$$\sum_{i=0}^m A_i(k)\le M,\ \forall k\in\mathbb{Z}_+. \quad (2.10)$$

*(iii)* $$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{i=0}^m\|A_i(k)\|<1. \quad (2.11)$$

*Chứng minh.* **(i)** Giả sử (i) được thỏa mãn, ta cần chứng minh (2.1) là co suy rộng. Đặt $\beta_0:=\sqrt[\tau+1]{\delta}<1$, khi đó $\delta=\beta_0^{\tau+1}$ và (2.9) trở thành

$$A_0(k)p + \sum_{i=1}^{m} A_i(k)p \le \beta_0^{\tau+1} p,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.12)$$

Vì $0 \le \tau_i(k) \le \tau, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \mathbb{Z}_{[1,m]}$, nên nhân hai vế (2.12) cho $\beta_0^{-\tau}$ thì ta được

$$A_0(k)p\beta_0^{-\tau} + \sum_{i=1}^{m} A_i(k)p\beta_0^{-\tau} \le \beta_0 p,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.13)$$

Vì $\beta_0^{-\tau} \ge 1, \beta_0^{-\tau} \ge \beta_0^{-\tau_i(k)}, \forall k \in \mathbb{Z}_+$, nên (2.13) trở thành

$$A_0(k)p + \sum_{i=1}^{m} A_i(k)p\beta_0^{-\tau_i(k)} \le \beta_0 p,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Do vậy, điều kiện (2.5) được thỏa mãn với $\beta = \beta_0$. Vậy theo Định lí 2.2, hệ (2.1) là co suy rộng.

**(ii)** Giả sử (ii) được thỏa mãn, ta chứng minh (2.1) là co suy rộng. Sau đây ta chứng minh (ii) kéo theo (i) và do đó (2.1) là co suy rộng theo chứng minh ở trên. Thật vậy, do $M \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $\rho(M) < 1$, nên theo Bổ đề 1.1, tồn tại $p \in \mathbb{R}^n$, $p >> 0$ sao cho $Mp << p$. Khi đó, tồn tại $\delta \in (0,1)$ sao cho bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$Mp << \delta p << p. \quad (2.14)$$

Nhân hai vế của (2.10) bởi $p$ và áp dụng (2.14) ta có (2.9). Vậy (i) được thỏa mãn. Do đó (2.5) là co suy rộng.

**(iii)** Cuối cùng, ta chứng minh nếu (iii) được thỏa mãn thì (2.1) là co suy rộng. Lấy $\varphi, \psi \in S$ và đặt $x(.) = x(., k_0, \varphi); y(.) = x(., k_0, \psi)$. Theo điều kiện đầu (2.2) ta có

$$\|x(k+k_0) - y(k+k_0)\| = \|\varphi(k) - \psi(k)\| \le \|\varphi - \psi\|, \forall k \in \mathbb{Z}_{[-\tau,0]}.$$

Từ (2.11), ta có

$$\sum_{i=0}^{m} \|A_i(k)\| < 1, \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.15)$$

Từ (2.15), tồn tại $\gamma \in (0,1)$ sao cho

$$\sum_{i=0}^{m} \|A_i(k)\| \gamma^{-\tau-1} < 1. \quad (2.16)$$

Đặt $\omega(k) := \gamma^{k-k_0-1}\|\varphi - \psi\| + \varepsilon,\ k \in \mathbb{Z}_+$, với

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\gamma} \max_{k\in\mathbb{Z}_+} \left\{ \sup_{(k,u_0,\dots,u_m,v_0,\dots,v_m)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^{n(2m+2)}} \left\{ \|g(k,u_0,\dots,u_m,v_0,\dots,v_m)\| \right\} \right\}.$$

Ta có

$$\|x(k+k_0) - y(k+k_0)\| \le \|\varphi - \psi\| \le \gamma^{-1}\|\varphi - \psi\| \le \omega(k+k_0), \forall k \in \mathbb{Z}_{[-\tau,0]}.$$

Hay

$$\|x(k) - y(k)\| \le \omega(k), \forall k \in \mathbb{Z}_{[-\tau+k_0,k_0]}. \quad (2.17)$$

Ta cần chứng minh

$$\|x(k) - y(k)\| \le \omega(k), \forall k \in \mathbb{Z}_+, k \ge k_0. \quad (2.18)$$

Giả sử ta có $k_1 \in \mathbb{Z}_+, k_1 \ge k_0$ sao cho

$$\|x(k) - y(k)\| \le \omega(k), \forall k \in \mathbb{Z}_{[-\tau+k_1,k_1]}.$$

Từ (2.1), (2.4), (2.16), (2.18), với $\tau_0 = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ ta có

$$\|x(k_1+1) - y(k_1+1)\|$$
$$\le \sum_{i=0}^{m} \|A_i(k_1)\| \left| x(k_1 - \tau_i(k_1)) - y(k_1 - \tau_i(k_1)) \right| + \|g(k; u_0,\dots,u_m,v_0,\dots v_m)\|$$
$$\le \sum_{i=0}^{m} \|A_i(k_1)\| \omega(k_1 - \tau_i(k_1)) + \|g(k; u_0,\dots,u_m,v_0,\dots v_m)\|.$$

Hay

$$\|x(k_1+1) - y(k_1+1)\|$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \|A_i(k_1)\| \left( \gamma^{k_1-\tau_i(k_1)-k_0-1}\|\varphi - \psi\| + \varepsilon \right) + \|g(k; u_0,\dots,u_m,v_0,\dots v_m)\|$$
$$= \gamma^{k_1-k_0-1}\sum_{i=0}^{m} \|A_i(k_1)\| \gamma^{-\tau_i(k_1)}\|\varphi - \psi\| + \sum_{i=0}^{m}\|A_i(k_1)\|\varepsilon + \|g(k; u_0,\dots,u_m,v_0,\dots v_m)\|$$
$$= \gamma^{k_1-k_0-1}\sum_{i=0}^{m} \|A_i(k_1)\| \gamma^{-\tau}\|\varphi - \psi\| + \sum_{i=0}^{m}\|A_i(k_1)\|\varepsilon + \|g(k; u_0,\dots,u_m,v_0,\dots v_m)\|$$
$$\le \gamma^{k_1-k_0-1}\gamma^{1}\|\varphi - \psi\| + \gamma\varepsilon + (1-\gamma)\varepsilon.$$

Do đó

$$\|x(k_1+1) - y(k_1+1)\| \le \omega(k_1+1) = \gamma^{k_1-k_0}\|\varphi - \psi\| + \varepsilon.$$

Vậy (2.1) là co suy rộng.

Khi $g(k; u_0,\dots,u_m,v_0,\dots v_m) = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$, $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{0,m}$ thì ta có $\varepsilon = 0$. Khi đó hệ (2.1) là co. Định lí được chứng minh. □

**Nhận xét 2.4.** (i) Trong bất đẳng thức (2.4), Khi hàm $g \equiv 0$ thì kết quả Định lí 2.2 và Hệ quả 2.3 trở về trường hợp đặc biệt tương ứng là Định lí 2.2 và Hệ quả 2.3 trong [6].

(ii) Kỹ thuật chứng minh trong Định lí 2.2 [6] cần dùng tính chất tuyến tính của hệ phương trình sai phân tuyến tính (hệ chặn trên) và cần qua hai bước. Tuy nhiên, trong chứng minh của Định lí 2.2, chúng tôi không dùng tính chất này và phép chứng minh không phải qua hai bước.

**Ví dụ 2.5.** Xét phương trình sai phân vô hướng

$$x(k+1) = \frac{e^{-k^2}}{3}x(k) - \arctan\left(\frac{2}{5}\sin(kx(k))x(k-\tau_1(k)) + \frac{1}{5+k^2}x(k-\tau_2(k))\right) + 3a\cos(kx(k)) \quad (2.21)$$

với $k \in \mathbb{Z}_+$, $\tau_1(.), \tau_1(.) : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ là những hàm chậm cho trước, $a$ là hằng số.

Ta thấy (2.21) là phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có dạng (2.1), với hàm $H(.;.,.,.)$ được xác định bởi

$$H(k;x_0,x_1,x_2)=\frac{e^{-k^2}}{3}x_0-\arctan\left(\frac{2}{5}\sin(kx_0)x_1+\frac{1}{5+k^2}x_2\right)$$
$$+3a\cos(kx_0), k\in\mathbb{Z}_+, x_0,x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

Ta có,

$$|H(k;x_0,x_1,x_2)-H(k;y_0,y_1,y_2)|$$
$$\le\frac{e^{-k^2}}{2}|x_0-y_0|+\frac{2}{5}|x_1-y_1|+\frac{1}{5+k^2}|x_2-y_2|$$
$$+3|a||\cos(kx_0)-\cos(ky_0)|$$

với mọi $k\in\mathbb{Z}_+, x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2\in\mathbb{R}$. Vậy (2.4) được thỏa mãn với $A_0(k)=\frac{e^{-k^2}}{3}$, $A_1(k)=\frac{2}{5}$, $A_2(k)=\frac{1}{5+k^2}$ và

$$g(k,x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2)$$
$$=3|a||\cos(kx_0)-\cos(ky_0)|$$
$$\le 6|a|,$$

với mọi $(k,x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^6$. Mặt khác, ta có

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(A_0(k)+A_1(k)+A_2(k)\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{14}{15}<1.$$

Do đó theo Hệ quả 2.3 (iii), phương trình sai phân (2.21) là co suy rộng. Ngoài ra, khi $a=0$ thì (2.21) là co. Chú ý rằng, các kết quả trong [6] không áp dụng được cho phương trình sai phân (2.11).

**3. Kết luận**

Bài báo đã giới thiệu khái niệm co suy rộng, một khái niệm tổng quát hơn của khái niệm co. Bài báo cũng đã phát triển kĩ thuật trong [6] để chứng minh nhiều điều kiện cho tính co suy rộng của hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm. Hướng phát triển của bài báo là nghiên cứu các điều kiện co suy rộng của lớp hệ phương trình sai phân trong một số không gian trừu tượng, điều kiện co suy rộng của lớp hệ phương trình vi phân, vi tích phân./.

## Tài liệu tham khảo

[1]. Z. Aminzare and E. D. Sontag (2015), "Contraction methods for nonlinear systems: A brief introduction and some open problems", *Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3835-3847.

[2]. S. Elaydi (2005), *An Introduction to Difference Equations*, Third Edition, Springer Science.

[3]. W. G. Kelley and A. C. Peterson (2001), *Difference equations: An introduction with applications*, Academic press.

[4]. W. Lohmiller and J. J. E. Slotine (1998), "On contraction analysis for nonlinear systems", *Automatica*, (34), pp. 683-696.

[5]. P. H. A. Ngoc and L. T. Hieu (2013), "New criteria for exponential stability of nonlinear difference systems with time-varying delay", *International Journal of Control*, 86 (9), pp. 1646-1651.

[6]. P. H. A. Ngoc, Trinh Hieu, L. T. Hieu, and N. D. Huy (2018), "On contraction of nonlinear difference systems with time-varying delays", *Mathematische Nachrichten*, https://doi.org/10.1002/mana.201700167.

[7]. P. H. A. Ngoc and H. Trinh (2018), "On contraction of functional differential equations", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56 (3), pp. 2377-2397.

## SUFFICIENT CRITERIA FOR GENERALIZED CONTRACTION OF NONLINEAR TIME - VARYING DIFFERENCE SYSTEMS WITH DELAY

**Summary**

In this paper, we introduce the problem of generalized contraction of nonlinear difference systems with delays. Thereby, we improve the existing approach to prove some new sufficient criteria for generalized contraction of the mentioned system. The obtained theorems generalize some existing results recently reported by other authors in the literature. An example is given to illustrate the obtained results.

Keywords: Generalizedly contractive; globally contractive; nonlinear difference systems with delay.

*Ngày nhận bài: 26/02/2019; Ngày nhận lại: 08/4/2019; Ngày duyệt đăng: 19/4/2019.*