

ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU DC VỚI RÀNG BUỘC HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LỖI VÀ TẬP LỖI

• Huỳnh Ngọc Cẩm^(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu DC với ràng buộc hệ bất phương trình lỗi và một tập lỗi. Đồng thời, chúng tôi cũng thiết lập điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu phân thức và bài toán tối ưu lỗi yếu với ràng buộc hệ bất phương trình lỗi và một tập lỗi.

Từ khóa: BCQ tương ứng tập lỗi, bất phương trình lỗi và tập lỗi, lỗi yếu, phân thức, điều kiện cần và đủ.

1. Giới thiệu

Bài toán tối ưu DC là bài toán tối ưu trong đó các hàm mục tiêu có thể được biểu diễn thành hiệu của hai hàm lồi. Nhiều bài toán trong thực tế đã được mô hình hóa dưới dạng bài toán tối ưu DC [7], [10]. Bài toán tối ưu DC được quan tâm nghiên cứu bởi các tác giả [5], [9]. Trong tối ưu lồi, điều kiện chính quy là một khái niệm quan trọng và được nghiên cứu bởi các tác giả [1], [2]. Một trong những điều kiện chính quy quan trọng có thể kể đến là BCQ (basic constraint qualification). BCQ lần đầu được giới thiệu bởi Hiriart-Urruty và Lemaréchal [5]. Sau đó khái niệm này đã được mở rộng nghiên cứu bởi các tác giả [3], [4]. Li và các cộng sự [6] đã nghiên cứu điều kiện chính quy BCQ cho bài toán tối ưu với ràng buộc hệ bất phương trình lỗi và đã chứng tỏ BCQ là điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu toàn cục của lớp bài toán này.

Năm 2011, Saeki và các cộng sự [9] đã xét bài toán tối ưu DC như sau

$$\begin{aligned} \min f(x) - g(x), \\ \phi_i(x) \leq 0, i \in I, \end{aligned} \quad (1.1)$$

trong đó $f, \phi_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, i \in I$, là các hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và $g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới, X là không gian vector tôpô Hausdorff lồi địa phương, I là tập chỉ số bất kỳ. Các tác giả đã chứng tỏ được BCQ là điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu DC (1.1). Đồng thời, họ cũng áp dụng kết quả đạt được để nghiên cứu bài toán tối ưu phân thức và bài toán tối ưu lỗi yếu, hai bài toán này sẽ được chúng tôi trình bày chi tiết trong các mục sau.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả trong [9] cho bài toán tối ưu DC với ràng buộc hệ bất phương trình lỗi và tập lỗi như sau

$$\begin{aligned} \min f(x) - g(x), \\ \phi_i(x) \leq 0, i \in I, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$x \in A,$$

trong đó A là tập lỗi. Cụ thể, chúng tôi thiết lập điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu DC (1.2). Sau đó chúng tôi áp dụng các kết quả này để chứng minh điều kiện cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu phân thức và bài toán tối ưu lỗi yếu với ràng buộc hệ bất phương trình lỗi và tập lỗi.

Một điều cần lưu ý ở đây rằng, trong trường hợp tổng quát, bài toán (1.2) không thể đưa về bài toán (1.1) do tập A không cần đóng.

Tương tự trong [9], bài báo thiết lập và chứng minh rằng BCQ tương ứng với tập tại một điểm là điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu DC (1.2). Đồng thời, chúng tôi cũng thiết lập điều kiện chính quy cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu phân thức và bài toán tối ưu lỗi yếu với ràng buộc hệ bất phương trình lỗi và một tập lỗi. Cuối cùng chúng tôi đưa ra một ví dụ cho kết quả đạt được.

Trước tiên, chúng tôi trình bày một số khái niệm và tính chất quan trọng trong tối ưu lồi mà chúng tôi sử dụng trong bài báo này (xem [5], [6], [8]).

1. Mở đầu

Cho X là không gian vector tôpô Hausdorff lồi địa phương và X^* là không gian đối ngẫu của X . Kí hiệu $\langle x^*, x \rangle$ chỉ giá trị của hàm $x^* \in X^*$ tại $x \in X$.

^(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

Giả sử $K \subset X$, tích của tập \mathbb{R}_+ và tập K được xác định bởi

$$\mathbb{R}_+ K = \{ta^* : t \in \mathbb{R}_+, a^* \in K\}.$$

Qui ước $\mathbb{R}_+ K = \{0\}$ nếu $K = \emptyset$.

Hàm chỉ của tập K , kí hiệu δ_K , được định nghĩa như sau

$$\delta_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K, \\ +\infty, & x \notin K. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1 ([8]). Cho tập con Ω lồi của X và $\bar{x} \in \Omega$. Khi đó nón pháp tuyến của tập Ω tại \bar{x} , kí hiệu $N(\Omega, \bar{x})$, được định nghĩa như sau

$$N(\Omega, \bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in \Omega\}.$$

Định nghĩa 1.2 ([8]). Cho hàm $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó

(1) Miền hữu hiệu của hàm ϕ , kí hiệu $\text{dom } \phi$, được định nghĩa như sau

$$\text{dom } \phi = \{x \in X \mid \phi(x) < +\infty\}.$$

(2) Hàm ϕ được gọi là chính thường nếu $\text{dom } \phi \neq \emptyset$.

(3) Tập hợp trên đồ thị của ϕ , kí hiệu $\text{epi } \phi$, được định nghĩa như sau

$$\text{epi } \phi = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in \text{dom } \phi, \phi(x) \leq \alpha\}.$$

(4) Hàm liên hợp của ϕ , kí hiệu: $\phi^* : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, được xác định như sau

$$\phi^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle - \phi(x), x \in X\}, \quad x^* \in X^*.$$

Định nghĩa 1.3 ([8]). Cho hàm $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường và $\bar{x} \in \text{dom } \phi$. Dưới vi phân của ϕ tại \bar{x} , kí hiệu $\partial\phi(\bar{x})$, được xác định bởi

$$\partial\phi(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq \phi(x) - \phi(\bar{x})\}.$$

Trong bài toán (1.2), gọi $S := \{x \in X \mid \phi_i(x) \leq 0, i \in I\}$ và giả sử $S \cap A \neq \emptyset$. Các tác giả trong [3], [6] đã giới thiệu khái niệm BCQ và BCQ tương ứng một tập như sau.

Định nghĩa 1.4 ([3]). (1) Lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn BCQ tại $\bar{x} \in S$ nếu

$$N(S, \bar{x}) = \text{cone co} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial\phi_i(\bar{x}) \right).$$

(2) Lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn BCQ tương ứng tập A tại $\bar{x} \in S \cap A$ nếu

$$N(S \cap A, \bar{x}) = \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial\phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x})$$

trong đó $I(\bar{x}) = \{i \in I, \phi_i(\bar{x}) = 0\}$.

Nhận xét 1.5 ([6]). Vì

$$N(S \cap A, \bar{x}) \supset \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial\phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x})$$

nên lớp các hàm $\{\phi_i : i \in I\}$ thỏa mãn BCQ tương ứng A tại $\bar{x} \in S \cap A$ nếu và chỉ nếu

$$N(S \cap A, \bar{x}) \subset \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial\phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x}).$$

Kí hiệu:

$$\mathbb{R}_+^{(I)} = \{\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \mid \lambda_i \geq 0 \forall i \in I, \text{card}\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\} < +\infty\}.$$

Saeki và các cộng sự [9] đã xây dựng điều kiện cần và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu DC (1.1) như sau.

Định lý 1.6 ([9]). Giả sử $\{\phi_i, i \in I\}$ là lớp các hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $\bar{x} \in S$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:

(1) Lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tại \bar{x} .

(2) Giả sử f là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho $\text{dom } f \cap S \neq \emptyset$ và $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_S^*$ đóng yếu* và giả sử $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Khi đó nếu \bar{x} là nghiệm địa phương của $f - g$ trong S thì với mỗi $v \in \partial g(\bar{x})$ tồn tại $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ với mỗi $i \in I$ và $v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial\phi_i(\bar{x})$.

Điều kiện cần cho nghiệm địa phương của bài toán tối ưu DC không ràng buộc được giới thiệu bởi Hiriart-Urruty [6] như sau.

Định lý 1.7 ([5]). Giả sử $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Nếu $\bar{x} \in X$ là nghiệm địa phương của $f - g$ trong X thì $\partial g(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$.

Sử dụng các lập luận trong [6, page 14], chúng tôi có bổ đề sau. Bổ đề này được sử dụng trong chứng minh kết quả chính của chúng tôi.

Bổ đề 1.8 ([6]). Giả sử $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, A là một tập lồi sao cho $\text{dom } f \cap A \neq \emptyset$ và $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_A^*$ đóng yếu*. Khi đó với mỗi $\bar{x} \in \text{dom } f \cap \bar{A}$, ta có

$$\partial(f + \delta_{\bar{A}})(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \partial \delta_{\bar{A}}(\bar{x}).$$

2. Kết quả chính

Trong định lí sau đây, chúng tôi thiết lập và chứng minh rằng BCQ tương ứng với tập A tại một điểm là điều kiện chính quy cân và đủ để có điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu DC (1.2).

Định lí 2.1. Giả sử $\{\phi_i, i \in I\}$ là lớp các hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $\bar{x} \in S \cap A$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:

(1) Lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tương ứng tập A tại \bar{x} .

(2) Giả sử f hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho $\text{dom } f \cap S \cap A \neq \emptyset$ và $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_{S \cap A}^*$ đóng yếu* và giả sử $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Khi đó nếu \bar{x} là nghiệm địa phương của $f - g$ trong $S \cap A$ thì với mỗi $v \in \partial g(\bar{x})$ tồn tại $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ với mỗi $i \in I$ và

$$v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Chứng minh. (1) \Rightarrow (2). Giả sử $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tương ứng tập A tại \bar{x} , nghĩa là

$$N(S \cap A, \bar{x}) = \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial \phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x}).$$

Giả sử $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho $\text{dom } f \cap S \cap A \neq \emptyset$ và $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_{S \cap A}^*$ là đóng yếu*, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Vì \bar{x} là nghiệm địa phương của $f - g$ trong $S \cap A$ nên \bar{x} là nghiệm địa phương của $(f + \delta_{S \cap A}) - g$ trong X và do đó \bar{x} cũng là

nghiệm địa phương của $(f + \delta_{S \cap \bar{A}}) - g$ trong X . Theo Định lí 1.7, ta có

$$\partial g(\bar{x}) \subset \partial(f + \delta_{S \cap \bar{A}})(\bar{x}).$$

Theo Bổ đề 1.8, ta có

$$\begin{aligned} \partial(f + \delta_{S \cap \bar{A}})(\bar{x}) &= \partial f(\bar{x}) + \partial \delta_{S \cap \bar{A}}(\bar{x}) \\ &= \partial f(\bar{x}) + N(S \cap \bar{A}, \bar{x}) \\ &\subset \partial f(\bar{x}) + N(S \cap A, \bar{x}) \\ &= \partial f(\bar{x}) + \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial \phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x}) \\ &= \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}). \end{aligned}$$

Đặt $\lambda_i = 0$ nếu $i \in I \setminus I(\bar{x})$, khi đó

$$\partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Do đó (2) thỏa mãn.

(2) \Rightarrow (1). Giả sử (2) thỏa mãn và lấy $x^* \in N(S \cap A, \bar{x})$. Khi đó $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in S \cap A$. Tương đương, $-x^*(\bar{x}) \leq -x^*(x), \forall x \in S \cap A$. Khi đó \bar{x} là nghiệm địa phương của $-x^*$ trong $S \cap A$. Đặt $f = -x^*$ và $g = 0$, khi đó \bar{x} là nghiệm địa phương của $f - g$ trong $S \cap A$. Do đó tồn tại $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ với mọi $i \in I$ và

$$0 \in -x^* + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Do đó

$$x^* \in \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}) = \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}) \subset \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial \phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x}),$$

nên ta có

$$N(S \cap A, \bar{x}) \subset \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial \phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x}).$$

Do đó, lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tương ứng tập A tại \bar{x} . Vậy (1) thỏa mãn.

Tiếp theo chúng tôi sẽ áp dụng kết quả của Định lí 2.1 để thiết lập điều kiện cân và đủ để có điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu phân thức với ràng buộc hệ bất phương trình lồi và tập lồi như sau

$$\begin{aligned} &\min \frac{f(x)}{g(x)}, \\ &\phi_i(x) \leq 0, i \in I, \\ &x \in A, \end{aligned}$$

trong đó $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, không âm trên $S \cap A$ và $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, dương trên $S \cap A$.

Định lí 2.2. Giả sử $\{\phi_i, i \in I\}$ là lớp các hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $\bar{x} \in S \cap A$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:

(1) Lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tương ứng tập A tại \bar{x} .

(2) Giả sử f là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho $\text{dom} f \cap S \cap A \neq \emptyset$ và $\text{epi} f^* + \text{epi} \delta_{S \cap A}^*$ đóng yếu*, f không âm trên $S \cap A$ và $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi, nửa liên tục dưới và dương trên $S \cap A$. Khi đó nếu \bar{x} là nghiệm địa phương của $\frac{f(x)}{g(x)}$ trong $S \cap A$ thì tồn tại $\lambda_0 \geq 0$ sao cho với

mỗi $v \in \lambda_0 \partial g(\bar{x})$ tồn tại $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ với mỗi $i \in I$ và

$$v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Chứng minh. (1) \Rightarrow (2). Đặt $\lambda_0 = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$.

Khi đó, với mỗi $x \in S \cap A$, ta có $\lambda_0 \leq \frac{f(x)}{g(x)}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \lambda_0 g(x) &\leq f(x) \\ \Leftrightarrow \lambda_0 g(x) - f(\bar{x}) &\leq f(x) - f(\bar{x}) \\ \Leftrightarrow \lambda_0 g(x) - \lambda_0 g(\bar{x}) &\leq f(x) - f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Do đó $(f - \lambda_0 g)(\bar{x}) \leq (f - \lambda_0 g)(x), \forall x \in S \cap A$. Suy ra \bar{x} là nghiệm địa phương của $f - \lambda_0 g$ trong $S \cap A$. Theo Định lí 2.1, với mỗi $v \in \lambda_0 \partial g(\bar{x})$ tồn tại $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ với mỗi $i \in I$ và

$$v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

(2) \Rightarrow (1). Đặt $f(x) = -\langle x^*, x - \bar{x} \rangle$ và $g(x) = 1, \forall x \in S \cap A$. Khi đó, vì \bar{x} là nghiệm địa phương của $\frac{f(x)}{g(x)}$, ta có \bar{x} là nghiệm địa

phương của $f(x) = -\langle x^*, x - \bar{x} \rangle$ trong $S \cap A$, suy ra $0 = f(\bar{x}) \leq \langle -x^*, x \rangle + \langle x^*, \bar{x} \rangle, \forall x \in S \cap A$.

Do đó, $x^* \in N(S \cap A, \bar{x})$ và theo giả thiết (2), tồn tại $(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ và

$$\text{Do đó } 0 \in -x^* + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}), \text{ nên}$$

$$x^* \in \text{coneco} \left(\bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial \phi_i(\bar{x}) \right) + N(A, \bar{x}).$$

Tiếp theo, chúng tôi áp dụng Định lí 2.1 cho bài toán tối ưu lồi yếu với ràng buộc hệ bất phương trình lồi và tập lồi trong không gian Banach thực, tron. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm sử dụng trong mục này.

Cho X là không gian Banach thực với chuẩn $\|\cdot\|$. Để tiện lợi, chúng tôi cũng kí hiệu chuẩn trong X^* là $\|\cdot\|$. Ánh xạ đa trị $J : X \rightarrow X^*$ định nghĩa như sau

$$J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, x \in X.$$

Gọi $B(X) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ là hình cầu đơn vị trong X . Khi đó X được gọi là tron nếu giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$ tồn tại với mỗi

$x, y \in B(X)$. Trong trường hợp này, vì ánh xạ đối ngẫu J của X là đơn trị nên tập $J(x)$ được xác định chỉ một phần tử $J(x)$ với mỗi $x \in X$.

Một hàm g được gọi là lồi yếu nếu nó có thể được viết dưới dạng $g = h - \frac{\rho}{2} \|\cdot\|^2$ với h là một hàm lồi và $\rho \geq 0$. Chúng ta xét bài toán lồi yếu sau đây

$$\min f(x) - \frac{\rho}{2} \|x\|^2,$$

$$\phi_i(x) \leq 0, i \in I,$$

$$x \in A,$$

trong đó $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, $\rho \geq 0$.

Chúng tôi có kết quả sau đây trong không gian Banach tron.

Định lí 2.3. Giả sử $\{\phi_i, i \in I\}$ là lớp các hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, X tron và $\bar{x} \in S \cap A$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:

(1) Lớp các hàm $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tương ứng tập A tại \bar{x} .

(2) Giả sử f hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ X tới $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho $\text{dom } f \cap S \cap A \neq \emptyset$ và $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_{S \cap A}^*$ đóng yếu* và $\rho \geq 0$. Khi đó nếu \bar{x} là nghiệm địa phương của $f(x) - \frac{\rho}{2} \|x\|^2$ trong $S \cap A$ thì tồn tại

$(\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+^{(I)}$ sao cho $\lambda_i \phi_i(\bar{x}) = 0$ với mỗi $i \in I$ và

$$\rho J(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Chứng minh. Từ X là không gian Banach tron, suy ra J là hàm đơn trị. Đặt $g(x) = \frac{\rho}{2} \|x\|^2, \forall x \in S \cap A$. Khi đó, ta có $\partial g(\bar{x}) = \rho J(\bar{x})$. Theo Định lí 2.1, ta có

$$\rho J(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Ngược lại, lại đặt $g(x) = \frac{\rho}{2} \|x\|^2, \forall x \in S \cap A$.

Theo giả thiết (2), ta có

$$\rho J(\bar{x}) \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial \phi_i(\bar{x}) + N(A, \bar{x}).$$

Theo Định lí 2.1, ta có $\{\phi_i, i \in I\}$ thỏa mãn điều kiện BCQ tương ứng A tại \bar{x} .

Ví dụ 2.4. Xét bài toán tối ưu DC sau đây

$$\min \frac{1}{3} |x|^3 + |x| - \frac{1}{2} x^2,$$

$$\max \{0, -x\} \leq 0,$$

$$x \in [-1, 1].$$

Ta có $X = \mathbb{R}, I = 1, f(x) = \frac{1}{3} |x|^3 + |x|,$

$\rho = 1, \phi_1(x) = \max\{0, -x\}, S = [0, +\infty), A = [-1, 1].$

Khi đó f và ϕ_1 là các hàm lồi, liên tục và $\{\phi_1\}$ thỏa mãn BCQ tại mọi điểm của $S \cap A$. Giả

sử \bar{x} là nghiệm của $f(x) - \frac{1}{2} x^2$. Theo Định lí

2.3, tồn tại $\lambda_1 \geq 0$ sao cho $\rho \bar{x} \in \partial f(\bar{x}) + \lambda_1 \partial \phi_1(\bar{x}) + N(A, \bar{x})$

và $\lambda_1 \phi_1(\bar{x}) = 0$. Khi $\bar{x} > 0$, từ $\partial f(\bar{x}) = \bar{x}^2 + \{1\}$

và $\partial \phi_1(\bar{x}) = \{0\}$ và $N(A, \bar{x}) = \{0\}$, ta có

$\bar{x} \in \bar{x}^2 + \{1\}$, \bar{x} là nghiệm của phương trình

$\bar{x}^2 - \bar{x} + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm trên

\mathbb{R} . Khi $\bar{x} = 0$, từ $\partial \phi_1(\bar{x}) = \bar{x}^2 + [-1, 1]$ và

$\partial \phi_1(\bar{x}) = [-1, 0]$ và $N(A, \bar{x}) = \{0\}$, ta có

$0 \in [-1, 1] + \lambda_1 [-1, 0] = [-1 - \lambda_1, 1]$ và 0 là nghiệm

toàn cục của bài toán./.

Tài liệu tham khảo

- [1]. L. T. H. An, P. D. Tao, and D. N. Hao (2003), "Solving an inverse problem for an elliptic equation by DC programming", *J. Glob. Optim.*, (25), pp. 407-423.
- [2]. L. T. H. An and P. D. Tao (2005), "The DC (difference of convex functions) programming and DCA revisited with DC models of real world non-convex optimization problems", *Ann. Oper. Res.*, (133), pp. 23-46.
- [3]. H. Bauschke, J. Borwein, and W. Li (1999), "Strong conical hull intersection property, bounded linear regularity, Jameson's property (G), and error bounds in convex optimization", *Math. Program.*, (86), pp. 135-160.
- [4]. H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and W. Li (2002), "Nonlinearly constrained best approximation in Hilbert space: The strong chip and the basic constraint qualification", *SIAM J. Optim.*, (13), pp. 228-239.
- [5]. J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal (1993), *Convex analysis and minimization algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany.
- [6]. C. Li, K. F. Ng, and T. K. Pong (2008), "Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization", *SIAM J. Optim.*, (19), pp. 163-187.
- [7]. V. Jeyakumar, A. Rubinov, B.M. Glover, and Y. Ishizuka (1996), "Inequality systems and global optimization", *J. Math. Anal. Appl.*, (202), pp. 900-919.

[8]. J. Peypouquet, *Convex optimization in normed spaces: Theory, methods and examples* (2015), Springer, Cham.

[9]. Y. Saeki, S. Suzuki and D. Kuroiwa (2011), “A necessary and sufficient constraint qualification for DC programming problems with convex inequality constraints”, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, pp. 169-174.

[10]. M. V. Ramana, L. Tuel, and H. Wolewicz (1997), “Strong duality for semi-definite programming”, *SIAMJ. Optim.*, (7), pp. 644-662.

THE CONSTRAINT QUALIFICATION FOR DC PROGRAMMING PROBLEMS WITH CONVEX SET CONSTRAINTS

Summary

In this paper, we provide a necessary and sufficient constraint qualification for optimal conditions in DC programming problems with constraints of convex inequality systems and a convex set. We also set up necessary and sufficient qualifications for optimal conditions in fractional and weakly convex programming problems with constraints of convex inequality systems and a convex set.

Keywords: BCQ, convex inequality and convex set, weakly convex, fractional, necessary and sufficient qualification.

Ngày nhận bài: 21/02/2019; Ngày nhận lại: 16/4/2019; Ngày duyệt đăng: 19/4/2019.