# SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP KIỂU AGARWAL ĐẾN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA HAI ÁNH XẠ $\alpha$- KHÔNG GIÃN SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN BANACH LỒI ĐỀU

• Nguyễn Kim Ngoan(*), Nguyễn Trung Hiếu(**)

**Tóm tắt**

*Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập sự hội tụ yếu và hội tụ của dãy lặp kiểu Agarwal đến điểm bất động chung của hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng trong không gian Banach lồi đều. Các kết quả này là những mở rộng của kết quả chính trong [6], [9]. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.*

Từ khóa: *Ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng, dãy lặp Agarwal, điểm bất động chung.*

## 1. Giới thiệu

Trong lí thuyết điểm bất động, ánh xạ không giãn là một khái niệm quan trọng trong hướng nghiên cứu sự tồn tại và xấp xỉ điểm bất động. Nhiều kết quả về xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn bởi những dãy lặp khác nhau cho ánh xạ này đã được thiết lập. Gần đây, một số tác giả quan tâm nghiên cứu mở rộng khái niệm ánh xạ không giãn bằng nhiều cách tiếp cận khác nhau. Năm 2011, Aoyama và cộng sự [1] đã giới thiệu một mở rộng của ánh xạ không giãn và được gọi là ánh xạ $\alpha$-không giãn. Sau đó, nhiều kết quả về sự hội tụ đến điểm bất động, điểm bất động chung của ánh xạ $\alpha$-không giãn đã được thiết lập. Năm 2017, Pant và cộng sự [6] đã giới thiệu một mở rộng của ánh xạ $\alpha$-không giãn và được gọi là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng, đồng thời, các tác giả cũng thiết lập điều kiện cho sự tồn tại điểm bất động, khảo sát sự hội tụ đến điểm bất động của lớp ánh xạ này bởi dãy lặp Agarwal. Năm 2018, Piri và cộng sự [7] đã thiết lập sự hội tụ đến điểm bất động của ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng bởi dãy lặp mới trong không gian Banach lồi đều. Tuy nhiên, cho đến nay, những kết quả về sự hội tụ đến điểm bất động chung của các ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng bởi những loại dãy lặp khác nhau chưa được nghiên cứu. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi đặt vấn đề thiết lập sự hội tụ của dãy lặp kiểu Agarwal đến điểm bất động chung của hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng trong không gian Banach lồi đều. Các kết quả này là sự mở rộng các kết quả chính trong [6] từ một ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng sang hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

**Định nghĩa 1.1** ([3, p. 1041], [10, p. 1089], [1, Definition 2.2], ([6, Definition 3.1]). Cho $E$ là không gian định chuẩn, $K$ là tập khác rỗng của $E$ và $T: K \to K$ là ánh xạ. Khi đó,

(1) $T$ được gọi là *ánh xạ không giãn* nếu với mọi $x, y \in K$ ta có

$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|.$$

(2) $T$ được gọi là *ánh xạ thỏa mãn điều kiện (C)* nếu với mọi $x, y \in K$ mà

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \le \|x - y\|$$

thì $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$.

(3) $T$ được gọi là ánh xạ $\alpha$*-không giãn* nếu tồn tại $\alpha \in [0,1)$ sao cho với $x, y \in K$, ta có

$$\|Tx - Ty\|^2 \le \alpha\|Tx - y\|^2 + \alpha\|Ty - x\|^2 + (1-2\alpha)\|x - y\|^2.$$

(4) $T$ được gọi là ánh xạ $\alpha$*-không giãn suy rộng* nếu tồn tại $\alpha \in [0,1)$ sao cho với $x, y \in K$ mà $\frac{1}{2}\|x - Tx\| \le \|x - y\|$ thì

$$\|Tx - Ty\| \le \alpha\|Tx - y\| + \alpha\|Ty - x\| + (1-2\alpha)\|x - y\|.$$

Lưu ý rằng mỗi ánh xạ thỏa mãn điều kiện (C) là một ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng với $\alpha = 0$. Đồng thời, trong [6], các tác giả cũng đưa ra ví dụ chứng tỏ rằng tồn tại ánh xạ là $\alpha$-không giãn suy rộng nhưng không là ánh xạ $\alpha$-không giãn, không là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (C) và do đó không là ánh xạ không giãn ([6], Example 3.3, Example 3.4).

Kí hiệu $F(T) = \{x \in K : Tx = x\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $T: K \to K$.

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

**Mệnh đề 1.2** ([6], Proposition 3.5). *Cho $E$ là không gian định chuẩn, $K$ là tập đóng khác rỗng của $E$ và $T: K \to K$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Khi đó, $T$ là ánh xạ tựa không giãn, tức là $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$* với $x \in K$ và $p \in F(T)$.

**Bổ đề 1.3** ([6], Lemma 5.2). Cho $E$ là *không gian định chuẩn, $K$ là tập con khác rỗng của $E$ và $T: K \to K$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Khi đó, với mỗi $x, y \in K$ ta có*

$$\|x - Ty\| \leq \frac{3+\alpha}{1-\alpha}\|x - Tx\| + \|x - y\|.$$

**Định nghĩa 1.4** ([2], p. 189). Cho $E$ Không gian Banach. Khi đó,

(1) $E$ được gọi là *lồi chặt* nếu với $u, v \in E$ mà $u \neq v$ và $\|u\| = \|v\| = 1$, ta có $\|u + v\| < 2$.

(2) $E$ được gọi là *lồi đều* nếu với mọi $\varepsilon \in (0, 2]$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|u + v\| < 2(1 - \delta)$ với $u, v \in E$ mà $\|u\| = \|v\| = 1$ và $\|u - v\| \geq \varepsilon$.

**Nhận xét 1.5** ([2], p. 190, Proposition 6). *Nếu $E$ là không gian Banach lồi đều thì $E$ là không gian Banach lồi chặt và phản xạ.*

Tính chất của tập hợp điểm bất động $F(T)$ với $T: K \to K$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng được thể hiện qua bổ đề sau:

**Bổ đề 1.6** ([6], Lemma 3.6). *Cho $E$ là không gian Banach lồi chặt, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng của $E$ và $T: K \to K$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Khi đó, $F(T)$ là tập lồi đóng.*

**Bổ đề 1.7** ([8], Lemma 1.3). *Cho $E$ là không gian Banach lồi đều, $0 < a \leq \lambda_n \leq b < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy sao cho $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r$, $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq r$ và $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n x_n + (1-\lambda_n) y_n\| = r$ với $r \geq 0$. Khi đó, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

**Định nghĩa 1.8** ([9], p. 534). Cho $E$ là không gian Banach lồi đều, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng của $E$ và $T, S: K \to K$ là các ánh xạ. Khi đó, $T$ và $S$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện* ($B$) nếu tồn tại hàm không giảm $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ với $f(0)=0$ và $f(r)>0$ với mọi $r>0$ sao cho với mọi $x \in K$, ta có

$$\max\{\|x - Tx\|, \|x - Sx\|\} \geq f(d(x, F))$$

với $F = F(T) \cap F(S)$ và $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\}$.

**Định nghĩa 1.9** ([4], Definition 1.1). Cho $E$ là không gian Banach. Không gian $E$ được gọi là *thỏa mãn tính chất Opial* nếu với mỗi $x \in E$ và với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến $x$, ta có $\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ với mọi $y \in E, x \neq y$.

Trong [4, p. 287] và [5, p. 107], các tác giả đã chỉ ra rằng không gian Hilbert, không gian Banach hữu hạn chiều và không gian Banach $l^p = \{(x_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ với chuẩn $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ trong đó $1 < p < \infty$ đều thỏa mãn tính chất Opial; không gian Banach $L^p = \{f: \Omega \to \mathbb{C}$ sao cho $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$ với chuẩn $\|f\| = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ trong đó $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$ không thỏa mãn tính chất Opial. Lưu ý rằng với $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$, $l^p$ và $L^p$ là hai không gian Banach mà không là không gian Hilbert.

**Mệnh đề 1.10** ([6], Proposition 5.3). *Cho $E$ là không gian Banach* có *tính chất Opial, $K$ là tập đóng khác rỗng của $E$, $T: K \to K$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng, $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến $p$ trong $K$ và $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$. Khi đó, $Tp = p$.*

**Định nghĩa 1.11** ([9], p. 534). Cho $X$ là không gian định chuẩn và $K$ là tập khác rỗng của $X$ và $T: K \to K$ là ánh xạ. Khi đó, $T$ được gọi là *nửa compact* nếu với dãy $\{x_n\}$ là dãy bị chặn trong $K$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ thì tồn tại dãy con $\{x_{n(i)}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho dãy $\{x_{n(i)}\}$ hội tụ trong $K$.

**Định nghĩa 1.12** ([5], p.89). Cho $E$ là không gian Banach, $K$ là tập khác rỗng của $E$, dãy $\{x_n\}$ bị chặn trong $E$ và $x \in E$. Khi đó

(1) *Bán kính tiệm cận của dãy $\{x_n\}$ tại $x$* được kí hiệu và xác định bởi

$$r(x, \{x_n\}) := \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

(2) *Bán kính tiệm cận của dãy $\{x_n\}$ đối với $K$* được kí hiệu và xác định bởi

$$r(K,\{x_n\}):=\inf\{r(x,\{x_n\}):x\in K\}.$$

(3) *Tâm tiệm cận của dãy* $\{x_n\}$ *đối với* $K$ được kí hiệu và xác định bởi

$$A(K,\{x_n\}):=\{x\in K: r(x,\{x_n\})=r(K,\{x_n\})\}.$$

**Nhận xét 1.13** ([5], p. 90, p. 117). *Cho* $E$ *là không gian Banach,* $K$ *là tập khác rỗng của* $E$ *và dãy* $\{x_n\}$ *bị chặn trong* $E$. *Khi đó,*

*(1) Nếu* $K$ *compact yếu và lồi thì* $A(K,\{x_n\})$ *khác rỗng và lồi.*

*(2) Nếu* $E$ *là không gian Banach lồi đều thì* $A(K,\{x_n\})$ *có duy nhất một điểm.*

## 2. Các kết quả chính

Trong mục này, chúng tôi xét dãy lặp kiểu Agarwal cho hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng có dạng như sau: Dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1\in K$ và

$$\begin{cases} y_n=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n, \\ x_{n+1}=(1-\beta_n)Tx_n+\beta_nSy_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, trong đó $\alpha_n,\beta_n\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$ với $\varepsilon\in(0,1)$, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Banach $E$ và $T,S:K\to K$ là hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng.

Trước hết, chúng tôi thiết lập một số tính chất của dãy lặp (2.1).

**Mệnh đề 2.1.** *Cho* $E$ *là không gian Banach,* $K$ *là tập lồi đóng khác rỗng của* $E$, $T,S:K\to K$ *là hai ánh xạ* $\alpha$*-không giãn suy rộng sao cho* $F=F(T)\cap F(S)\neq\emptyset$, *dãy* $\{x_n\}$ *xác định bởi (2.1). Khi đó,* $\{x_n\}$ *là dãy bị chặn và* $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ *tồn tại với* $p\in F$.

**Chứng minh.** Với $p\in F$, sử dụng Mệnh đề 1.2, ta có

$$\begin{aligned}
&\|y_n-p\| \\
&=\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n-p\| \\
&\le(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\alpha_n\|Tx_n-p\| \\
&\le(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\alpha_n\|x_n-p\| \\
&=\|x_n-p\|.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Sử dụng Mệnh đề 1.2 và (2.2), ta có

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\| \\
&=\|(1-\beta_n)Tx_n+\beta_nSy_n-p\| \\
&\le(1-\beta_n)\|Tx_n-p\|+\beta_n\|Sy_n-p\| \\
&\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_n\|y_n-p\| \\
&\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_n\|x_n-p\| \\
&=\|x_n-p\|.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Từ (2.3), ta suy ra $\{x_n\}$ là dãy bị chặn và $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ tồn tại. □

Kết quả sau thiết lập điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại điểm bất động chung của hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng trong không gian Banach lồi đều.

**Mệnh đề 2.2.** *Cho* $E$ *là không gian Banach lồi đều,* $K$ *là tập lồi đóng khác rỗng của* $E$, $T,S:K\to K$ *là các ánh xạ* $\alpha$*-không giãn suy rộng và dãy* $\{x_n\}$ *xác định bởi (2.1 ). Khi đó,* $F=F(T)\cap F(S)\neq\emptyset$ *khi và chỉ khi* $\{x_n\}$ *bị chặn và* $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|Sx_n-x_n\|=0.$

**Chứng minh.** Giả sử $\{x_n\}$ bị chặn và $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|Sx_n-x_n\|=0$. Do $E$ là không gian Banach lồi đều nên theo Nhận xét 1.13 tồn tại duy nhất $p\in A(K,\{x_n\})$. Khi đó, sử dụng Bổ đề 1.3, ta có

$$\begin{aligned}
r(Tp,\{x_n\})&=\limsup_{n\to\infty}\|x_n-Tp\| \\
&\le\limsup_{n\to\infty}\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\|x_n-Tx_n\|+\limsup_{n\to\infty}\|x_n-p\| \\
&=\limsup_{n\to\infty}\|x_n-p\| \\
&=r(p,\{x_n\}).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Lập luận tương tự, ta chứng minh được

$$r(Sp,\{x_n\})\le r(p,\{x_n\}).\tag{2.5}$$

Khi đó, từ (2.4), (2.5) và định nghĩa bán kính tiệm cận của dãy $\{x_n\}$ đối với $K$, ta suy ra

$$r(Tp,\{x_n\})\le r(K,\{x_n\}) \text{ và}$$
$$r(Sp,\{x_n\})\le r(K,\{x_n\}).$$

Suy ra $Tp\in A(K,\{x_n\})$ và $Sp\in A(K,\{x_n\})$. Sử dụng tính duy nhất của tâm tiệm cận của dãy $\{x_n\}$ đối với $K$, ta có $Tp=Sp=p$ hay $p\in F=F(T)\cap F(S)$. Do đó $F\neq\emptyset$.

Ngược lại, giả sử $F\neq\emptyset$. Khi đó, tồn tại $p\in F$. Theo Mệnh đề 2.1, ta có $\{x_n\}$ là dãy bị chặn và $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ tồn tại. Đặt

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=c.\tag{2.6}$$

Khi đó, từ (2.2) và (2.6) ta được

$$\limsup_{n\to\infty} \| y_n - p \| \le c. \quad (2.7)$$

Do $T$ và $S$ là các ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng nên theo Mệnh đề 1.2, ta có

$$\| Tx_n - p \| \le \| x_n - p \|, \| Sy_n - p \| \le \| y_n - p \|. \quad (2.8)$$

Khi đó, kết hợp (2.8) với (2.6) và (2.7), ta được

$$\limsup_{n\to\infty} \| Tx_n - p \| \le c, \limsup_{n\to\infty} \| Sy_n - p \| \le c. \quad (2.9)$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - p \| \\ &= \lim_{n\to\infty} \| (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Sy_n - p \| \\ &= \lim_{n\to\infty} \| (1-\beta_n)(Tx_n - p) + \beta_n (Sy_n - p) \|. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Khi đó, từ (2.9), (2.10) và sử dụng Bổ đề 1.7 ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| Sy_n - Tx_n \| = 0. \quad (2.11)$$

Hơn nữa, kết hợp đẳng thức $\| x_{n+1} - Tx_n \| = \beta_n \| Tx_n - Sy_n \|$ với (2.11), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - Tx_n \| = 0. \quad (2.12)$$

Khi đó, kết hợp bất đẳng thức $\| x_{n+1} - Sy_n \| \le \| x_{n+1} - Tx_n \| + \| Tx_n - Sy_n \|$ với (2.11) và (2.12), ta được $\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - Sy_n \| = 0.$ Kết hợp điều này với (2.6) và bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - p \| &\le \| x_{n+1} - Sy_n \| + \| Sy_n - p \| \\ &\le \| x_{n+1} - Sy_n \| + \| y_n - p \|, \end{aligned}$$

ta được $c \le \liminf_{n\to\infty} \| y_n - p \|$. Khi đó, từ (2.7) ta được $\lim_{n\to\infty} \| y_n - p \| = c.$ Do đó,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \| y_n - p \| \\ &= \lim_{n\to\infty} \| (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n - p \| \\ &= \lim_{n\to\infty} \| (1-\alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n (Tx_n - p) \|. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Khi đó, từ (2.6), (2.9), (2.13) và sử dụng Bổ đề 1.7, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| Tx_n - x_n \| = 0. \quad (2.14)$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} &\| Sy_n - y_n \| \\ &= \| Sy_n - [(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n] \| \\ &\le \| Sy_n - x_n \| + \alpha_n \| x_n - Tx_n \| \\ &\le \| Sy_n - Tx_n \| + \| Tx_n - x_n \| + \alpha_n \| x_n - Tx_n \|. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Từ (2.11), (2.14) và (2.15), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| Sy_n - y_n \| = 0. \quad (2.16)$$

Khi đó, kết hợp bất đẳng thức $\| x_n - y_n \| \le \| x_n - Tx_n \| + \| Tx_n - Sy_n \| + \| Sy_n - y_n \|$ với (2.11), (2.14) và (2.16), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0. \quad (2.17)$$

Mặt khác, từ Bổ đề 1.3, ta có

$$\begin{aligned} &\| x_n - Sx_n \| \\ &\le \| x_n - y_n \| + \| y_n - Sx_n \| \\ &\le \| x_n - y_n \| + \frac{3+\alpha}{1-\alpha} \| y_n - Sy_n \| + \| y_n - x_n \| \\ &\le 2 \| x_n - y_n \| + \frac{3+\alpha}{1-\alpha} \| y_n - Sy_n \|. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Do đó, từ (2.16), (2.17) và (2.18), ta được $\lim_{n\to\infty} \| x_n - Sx_n \| = 0$. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập sự hội tụ yếu của dãy lặp (2.1) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng.

**Định lí 2.3.** *Cho $E$ là không gian Banach lồi đều và có tính chất Opial, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng của $E$, $T, S : K \to K$ là hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng sao cho $F \neq \emptyset$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1). Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến $p \in F$.*

**Chứng minh.** Từ Mệnh đề 2.2, ta có dãy $\{x_n\}$ bị chặn và

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - Tx_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - Sx_n \| = 0.$$

Vì $E$ là không gian Banach lồi đều nên $E$ là không gian Banach phản xạ. Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{n(i)}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n(i)}\}$ hội tụ yếu đến $p \in K$. Do đó,

$$\lim_{i\to\infty} \| Tx_{n(i)} - x_{n(i)} \| = \lim_{i\to\infty} \| Sx_{n(i)} - x_{n(i)} \| = 0.$$

Khi đó, sử dụng Mệnh đề 1.10, ta có $Tp = Sp = p$ hay $p \in F = F(T) \cap F(S)$. Tiếp theo, ta giả sử $\{x_n\}$ không hội tụ yếu đến $p$. Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{n(k)}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n(k)}\}$ hội tụ yếu đến $q \in K$ với $p \neq q$. Lập luận tương tự như trên, từ Mệnh đề 1.10, ta có $q \in F$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.1, ta có $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ và $\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ tồn tại. Sử dụng tính chất Opial, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \| = \liminf_{i\to\infty} \| x_{n(i)} - p \|$$
$$< \liminf_{i\to\infty} \| x_{n(i)} - q \|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \| x_n - q \| = \liminf_{k\to\infty} \| x_{n(k)} - q \|$$
$$< \liminf_{k\to\infty} \| x_{n(k)} - p \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|.$$

Điều này là một mâu thuẫn. Do đó, $p = q$. Vậy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến $p \in F$. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập một số kết quả về sự hội tụ mạnh của dãy lặp (2.1) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng.

**Định lí 2.4**. *Cho $E$ là không gian Banach, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng của $E$, $T,S: K \to K$ là hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng với $F \neq \emptyset$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) và $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p \in F$.*

**Chứng minh.** Với $p \in F$, theo Mệnh đề 2.1, ta có $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ tồn tại. Do đó,
$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = \liminf_{n\to\infty} \{ \| x_n - p \|, p \in F \}$ tồn tại. Khi đó, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = \liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$. Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{n(k)}\}$ của $\{x_n\}$ và với dãy $\{p_k\} \subset F$, ta có $\| x_{n(k)} - p_k \| < 2^{-k}$. Khi đó, theo bất đẳng thức (2.3), ta được

$$\| x_{n(k+1)} - p_k \| \leq \| x_{n(k)} - p_k \| \leq 2^{-k}.$$

Điều này dẫn đến

$$\| p_{k+1} - p_k \| \leq \| p_{k+1} - x_{n(k+1)} \| + \| x_{n(k+1)} - p_k \|$$
$$\leq 2^{-(k+1)} + 2^{-k} < 2^{-(k-1)}.$$

Suy ra $\{p_k\}$ là dãy Cauchy trong $F$. Hơn nữa, theo Bổ đề 1.6, ta có $F = F(T) \cap F(S)$ là tập đóng trong không gian Banach hay $F$ có tính đầy đủ. Do đó, dãy $\{p_k\}$ hội tụ mạnh đến $p \in F$. Hơn nữa, từ

$$\| x_{n(k)} - p \| \leq \| x_{n(k)} - p_k \| + \| p_k - p \|$$
$$\leq 2^{-k} + \| p_k - p \|,$$

ta có $\lim_{k\to\infty} \| x_{n(k)} - p \| = 0$. Kết hợp với giới hạn $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ tồn tại, ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p \in F$. □

**Định lí 2.5.** *Cho $E$ là không gian Banach lồi đều, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng của $E$, $T,S: K \to K$ là hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng sao cho $F \neq \emptyset$, thỏa mãn điều kiện $(B)$ và dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1). Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p \in F$.*

**Chứng minh.** Từ Mệnh đề 2.2, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| Tx_n - x_n \| = \lim_{n\to\infty} \| Sx_n - x_n \| = 0. \quad (2.19)$$

Vì $T$ và $S$ thỏa mãn điều kiện $B$ nên tồn tại hàm không giảm $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ sao cho $f(0) = 0$ và $f(r) > 0$ với mọi $r > 0$ và

$$\max\{ \| x_n - Tx_n \|, \| x_n - Sx_n \| \} \geq f(d(x_n, F)). \quad (2.20)$$

Khi đó, từ (2.19) và (2.20), ta được $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F)) = 0$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) > 0$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có $d(x_n, F) > \varepsilon$. Khi đó, $f(d(x_n, F)) \geq f(\varepsilon)$. Do đó $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F)) \geq f(\varepsilon) > 0$. Điều này mâu thuẫn với $\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F)) = 0$. Do đó, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$. Khi đó, theo Định lí 2.4, ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p \in F$. □

**Định lí 2.6.** *Cho $E$ là không gian Banach lồi đều, $K$ là tập lồi đóng khác rỗng của $E$, $T,S: K \to K$ là hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng sao cho $F \neq \emptyset$, $T$ hoặc $S$ là nửa compact và dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1). Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $x^* \in F$.*

**Chứng minh.** Theo Định lí 2.3, ta có $\{x_n\}$ bị chặn và $\lim_{n\to\infty} \| Tx_n - x_n \| = \lim_{n\to\infty} \| Sx_n - x_n \| = 0$. Hơn nữa, vì $T$ hoặc $S$ là nửa compact nên tồn tại dãy con $\{x_{n(k)}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n(k)}\}$ hội tụ đến $p \in K$. Mặt khác, từ Bổ đề 1.3, ta có

$$\| x_{n(k)} - Tp \| \leq \frac{3+\alpha}{1-\alpha} \| x_{n(k)} - Tx_{n(k)} \| + \| x_{n(k)} - p \|.$$

Điều này dẫn đến $\lim_{k\to\infty} \| x_{n(k)} - Tp \| = 0$ hay dãy $\{x_{n(k)}\}$ hội tụ đến $Tp$. Sử dụng tính duy nhất của giới hạn, ta có $T(p) = p$. Lập luận tương tự, ta chứng minh được $S(p) = p$. Vì vậy $p \in F$.

Do đó, theo Mệnh đề 2.1, ta có $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ tồn tại. Suy ra tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = \liminf_{n\to\infty} \{\| x_n - p \|, p \in F\}.$$

Mặt khác, vì $d(x_{n(k)}, F) \le \| x_{n(k)} - p \|$ nên $\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, F) = 0$. Do đó, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$. Khi đó, theo Định lí 2.4, ta có dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $x^* \in F$. □

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ minh họa cho việc sử dụng kết quả đạt được để chứng tỏ sự hội tụ của dãy lặp (2.1) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Trong đó, Ví dụ 2.8 chứng tỏ rằng dãy lặp (2.1) hội tụ đến điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn nhanh hơn dãy lặp (1.5) trong [9]. Lưu ý rằng, trong hai ví dụ sau, tất cả các tính toán số được viết trên phần mềm Scilab-6.0.0.

**Ví dụ 2.7.** Xét $E = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn giá trị tuyệt tối, $K = [-1,1]$ và hai ánh xạ $T, S : K \to K$ được xác định bởi: *nếu*

$$Tx = \begin{cases} x/3 & \text{nếu } x \in [-1,0], \\ 0 & \text{nếu } x = 1/3, \\ -x & \text{nếu } x \in (0,1] \setminus \{1/3\}, \end{cases}$$

và

$$Sx = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in [-1,0], \\ 0 & \text{nếu } x = 1/2, \\ -x/2 & \text{nếu } x \in (0,1] \setminus \{1/2\}. \end{cases}$$

Khi đó, $T$ và $S$ là hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Thật vậy, trước hết ta chứng minh $T$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng với $\alpha = 0,5$. Đặt $VP = \alpha \| Tx - y \| + \alpha \| Ty - x \| + (1-2\alpha) \| x - y \|$. Ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

***Trường hợp 1.*** Với $x, y \in [-1,0]$ ta có

$$\begin{aligned} VP &= 0,5 |(x/3) - y| + 0,5 |(y/3) - x| \\ &\ge 0,5 |(x/3) - y + (y/3) - x| \\ &= (2/3)|x+y| \ge (1/3)|x+y| \\ &\ge \frac{1}{3}|x-y| \\ &= \| Tx - Ty \|. \end{aligned}$$

***Trường hợp 2.*** Với $x \in [-1,0], y = 1/3$ ta có

$$\begin{aligned} VP &= 0,5 |(x/3) - (1/3)| + 0,5 |0 - x| \\ &= 0,5[(1/3) - (x/3)] - 0,5x \\ &= -(2/3)x + (1/6) \\ &\ge -(1/3)x = \| Tx - Ty \|. \end{aligned}$$

***Trường hợp 3.*** Với $x \in (0,1] \setminus \{1/3\}$, $y = 1/3$ ta có

$$\begin{aligned} VP &= 0,5 |-x - (1/3)| + 0,5 |0 - x| \\ &= 0,5[x + (1/3)] + 0,5x \\ &= x + (1/6) \\ &\ge x \\ &= \| Tx - Ty \|. \end{aligned}$$

***Trường hợp 4.*** Với $x, y \in (0,1] \setminus \{1/3\}$ ta có

$$\begin{aligned} VP &= 0,5 |-x - y| + 0,5 |-y - x| \\ &= |x + y| \\ &\ge |x - y| \\ &= \| Tx - Ty \|. \end{aligned}$$

***Trường hợp 5.*** Với $x \in [-1,0]$, $y \in (0,1] \setminus \{1/3\}$ ta có $\| Tx - Ty \| = |(x/3) + y|$,

$$\begin{aligned} VP &= 0,5 |(x/3) - y| + 0,5 |-y - x| \\ &\ge 0,5[y - (x/3)] + 0,5(x + y) \\ &= (x/3) + y \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} VP &= 0,5 |(x/3) - y| + 0,5 |-y - x| \\ &\ge 0,5[y - (x/3)] + 0,5(-x - y) \\ &= -(2x/3) \\ &\ge -(x/3) - y. \end{aligned}$$

Do đó, $VP \ge |(x/3) + y| = \| Tx - Ty \|$. Vậy $T$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng với $\alpha = 0,5$.

Lập luận tương tự như trên, ta chứng tỏ được $S$ là ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng với $\alpha = 0,5$.

Ta lại có $F = F(T) \cap F(S) = \{0\}$. Hơn nữa, các giả thiết còn lại trong Định lí 2.3, Định lí 2.4, Định lí 2.5, Định lí 2.6 cũng thỏa mãn. Do đó, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) hội tụ đến 0 là điểm bất động chung của $S, T$. Tuy nhiên, bằng cách chọn $x = 1/3$ và $y = 1$ ta có

$0,5 \| x - Tx \| = 1/6 \le 2/3 = \| x - y \|$ và

$\| Tx - Ty \| = 1 > 2/3 = \| x - y \|$.

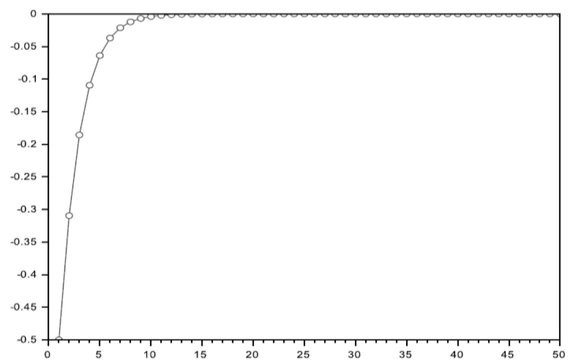
Tương tự, bằng cách chọn $x = 0,5$ và $y = 5/6$ ta có

$0,5 \| x - Sx \| = 0,25 \le 1/3 = \| x - y \|$ và

$\| Sx - Sy \| = 5/12 > 1/3 = \| x - y \|$. Điều này dẫn đến hai ánh xạ $T, S$ không thỏa mãn điều kiện $(C)$ và do đó không là ánh xạ không giãn. Vì vậy, các kết quả về sự hội tụ của dãy lặp đến điểm bất động chung của ánh xạ không giãn trong [9] là không áp dụng được cho hai ánh xạ $T, S$ được đưa ra.

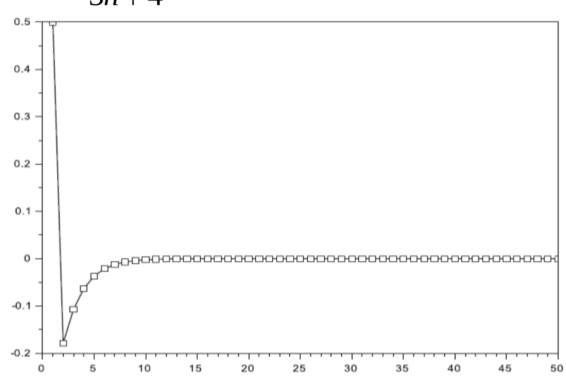
Bằng tính toán số, chúng tôi minh họa dáng điệu hội tụ của dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) đến 0 trong hai trường hợp cụ thể sau:

Trường hợp: $n=50,\ x_1=-0,5$, $\alpha_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$ và $\beta_n=\dfrac{2n+3}{3n+4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.



**Hình 1. Dáng điệu hội tụ của dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) đến 0 với $x_1=-0,5$**

Trường hợp: $n=50,\ x_1=0,5,\ \ \alpha_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$ và $\beta_n=\dfrac{2n+3}{3n+4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.



**Hình 2. Dáng điệu hội tụ của dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) đến 0 với $x_1=0.5$**

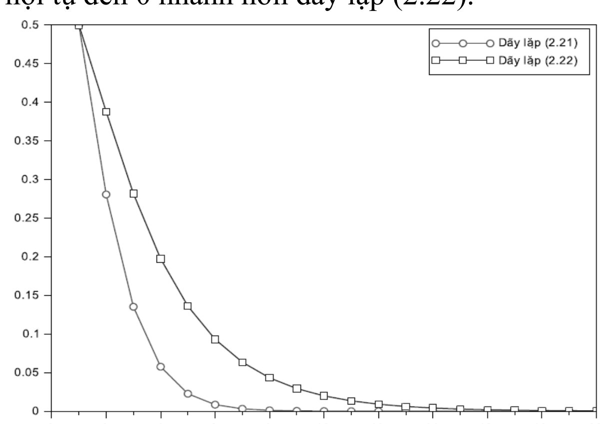
**Ví dụ 2.8.** Xét $E=\mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn giá trị tuyệt tối, $K=[0,1]$ và hai ánh xạ $T,S:K\to K$ được xác định bởi: $Tx=0,5x^2$ và $Sx=\sin x$ với $x\in K$. Khi đó, $T$ và $S$ là ánh xạ không giãn và do đó $T$ và $S$ ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Hơn nữa, các giả thiết còn lại của Định lí 2.6 và [9, Theorem 3.7] cũng thỏa mãn. Do đó, theo Định lí 2.6 và [9, Theorem 3.7], dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) và dãy (1.5) trong [9] hội tụ đến 0 là điểm bất động chung của $S,T$. Tuy nhiên, với cách chọn $x_1=0,5$, $\alpha_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$ và $\beta_n=\dfrac{2n+3}{3n+4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1) có dạng

$$\begin{cases} x_1=0,5 \\ \ldots \\ x_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n+4}0,5x_n^2+\dfrac{2n+3}{3n+4}\sin(y_n), \\ y_n=\dfrac{n+2}{2n+3}x_n+\dfrac{n+1}{2n+3}0,5x_n^2 \end{cases} \tag{2.21}$$

còn dãy lặp (1.5) trong bài báo [9] có dạng

$$\begin{cases} x_1=0,5 \\ \ldots \\ x_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n+4}x_n+\dfrac{2n+3}{3n+4}\sin(y_n), \\ y_n=\dfrac{n+2}{2n+3}x_n+\dfrac{n+1}{2n+3}0,5x_n^2 \end{cases} \tag{2.22}$$

Hình ảnh sau chứng tỏ rằng dãy lặp (2.21) hội tụ đến 0 nhanh hơn dãy lặp (2.22).




**Hình 3. Dáng điệu hội tụ của dãy lặp (2.21) và dãy lặp (2.22) đến 0**

**Nhận xét 2.9.** Các kết quả trong Mệnh đề 2.2, Định lí 2.3, Định lí 2.4, Định lí 2.5, Định lí 2.6 là sự tổng quát của các kết quả chính trong [6] từ một ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng sang hai ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng. Hơn nữa, vì mỗi ánh xạ thỏa mãn điều kiện (C) là một ánh xạ $\alpha$-không giãn suy rộng với $\alpha=0$ và từ Ví dụ 2.7, chúng ta cũng nhận thấy rằng việc nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp kiểu Agarwal đến điểm bất động chung của ánh xạ thỏa mãn điều kiện (C) là không cần thiết.

*Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2018.02.58./.*

**Tài liệu tham khảo**

[1]. K. Aoyama and F. Kohsaka (2011), "Fixed point theorem for $\alpha$-nonexpansive mapping in Banach space", *Nonlinear Anal.*, (74), pp. 4387-4391.

[2]. B. Beauzamy (1982), *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland Mathematics Studies, vol.68, North-Holland, Amsterdam.

[3]. F. E. Browder (1965), "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, (54), pp. 1041-1044.

[4]. E. L. Dozo (1973), "Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38(2), pp. 286-292.

[5] K. Goebel and W. A. Kirk (1990), *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.28. Cambridge University Press, Cambridge.

[6]. R. Pant and R. Shukla (2017), "Approximating fixed points of generalized $\alpha$-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 38 (2), pp. 248-266.

[7]. H. Piri, B.Daraby, S. Rahrovi and M. Ghasemi (2018), "Approximating fixed points of generalized $\alpha$-nonexpansive mappings in Banach spaces by new faster iteration process", *Numer. Algorithms*, pp. 1-20, first online.

[8]. J. Schu (1991), "Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings", *Bull. Aust. Math. Soc.*, 43 (1), pp. 153-159.

[9]. N. Shahzad and R. Al-Dubiban (2006), "Approximating common fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces", *Georgian Math. J.*, 13 (3), pp. 529-537.

[10]. T. Suzuki (2011), "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, (340), pp. 1088-1095.

## CONVERGENCE OF AGARWAL-TYPE ITERATION PROCESS TO COMMON FIXED POINTS OF TWO GENERALIZED $\alpha$-NONEXPANSIVE MAPPINGS IN UNIFORMLY CONVEX BANACH SPACES

**Summary**

In this paper, we come up with establishing the weak and strong convergence of Agarwal type iteration process to common fixed points of two generalized $\alpha$-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces. These results are the extensions of the main ones found in [6] and [9]. In addition, some examples are provided for illustration.

Keywords: Generalized $\alpha$-nonexpansive mapping, Agarwal iteration process, common fixed point.

*Ngày nhận bài: 20/2/2019; Ngày nhận lại: 16/4/2019; Ngày duyệt đăng: 19/4/2019.*