SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO ÁNH XẠ CO DẠNG HỮU TỈ SUY RỘNG TRÊN KHÔNG GIAN b-METRIC

• Nguyễn Thị Thanh Lý(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh một số kết quả về sự tồn tại điểm bất động cho ánh xạ co dạng hữu tỉ trên không gian b-metric. Đồng thời xây dựng ví dụ để minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động chung, không gian b-metric, co Geraghty, α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác.

1. Giới thiệu

Năm 1973, Geraghty [5] đã giới thiệu một mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach. Gần đây, kết quả của Geraghty thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả và được mở rộng theo nhiều cách khác nhau [7], [9]. Năm 2016, Chuadchawna và cộng sự [8] đã cải tiến và mở rộng các kết quả trong [7], [9] bằng cách chứng minh định lí điểm bất động cho ánh xạ co kiểu α-η-ψ-Greraghty trên không gian metric α-η-đầy đủ. Trong khi đó, Ansari và cộng sự [2] mở rộng định lí Geraghty và một số kết quả trước đó bằng cách sử dụng lớp hàm $\mathcal{C}$ trên không gian metric α-η đầy đủ. Một số tác giả khác mở rộng định lí Geraghty theo kiểu co hữu tỉ như [6], [10] trên không gian b-metric.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng định lí Geraghty trên không gian b-metric bằng cách thiết lập và chứng minh một số kết quả về sự tồn tại điểm bất động cho ánh xạ co dạng hữu tỉ suy rộng trên không gian b-metric, đồng thời xây dựng ví dụ để minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết chúng tôi trình bày một số kết quả cần cho nội dung chính của bài báo.

Năm 1989, Czerwik [4] giới thiệu khái niệm không gian b-metric như sau.

Định nghĩa 1.1 ([4], Định nghĩa 2.7). Cho X là tập khác rỗng, $s \geq 1$ và $d : X \times X \to [0,\infty)$ là hàm thỏa mãn với mọi $x, y, z \in X$,

(1) $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) \leq s\big(d(x,z) + d(z,y)\big)$.

Khi đó, d được gọi là *b-metric* trên X và (X,d,s) được gọi là *không gian b-metric*.

Định nghĩa 1.2 ([4]). Cho (X,d,s) là không gian b-metric và dãy $\{x_n\}$ trong X.

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x, kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *Cauchy* trong X nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

(3) (X,d,s) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong X là một dãy hội tụ.

Aghajani và cộng sự [1] đã chứng minh kết quả sau về sự hội tụ trong không gian b-metric.

Bổ đề 1.3 ([1], Bổ đề 1). Cho (X,d,s) là không gian b-metric và $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy trong X lần lượt hội tụ đến x, y. Khi đó,

(1) $\frac{1}{s^2} d(x,y) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq s^2 d(x,y)$.

(2) Với mỗi $z \in X$,

$$\frac{1}{s} d(x,z) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, z) \leq s d(x,z).$$

Năm 2014, Popescu [9] giới thiệu khái niệm ánh xạ α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác như sau.

Định nghĩa 1.4 ([9], Định nghĩa 6). Cho X là tập khác rỗng và $f : X \to X$, $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ là hai ánh xạ. Khi đó, f được gọi là ánh xạ *α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác* nếu

(1) Với mọi $x \in X$, $\alpha(x, fx) \geq 1$ kéo theo $\alpha(fx, f^2x) \geq 1$.

(2) Với mọi $x, y \in X$, $\alpha(x,y) \geq 1$, $\alpha(y, fy) \geq 1$ kéo theo $\alpha(x, fy) \geq 1$.

Năm 2016, Chuadchawna và cộng sự [8] giới thiệu khái niệm xạ *α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác tương ứng với η* như sau.

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

Định nghĩa 1.5 ([8], Định nghĩa 2.2). Cho X là tập khác rỗng và $f: X \to X$, $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ là hai ánh xạ. Khi đó, f được gọi là ánh xạ α*-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác tương ứng với* η nếu

(1) Với mọi $x \in X$, $\alpha(x, fx) \geq \eta(x, fx)$ kéo theo $\alpha(fx, f^2x) \geq \eta(fx, f^2x)$.

(2) Với mọi $x, y \in X$, $\alpha(x,y) \geq \eta(x,y)$, $\alpha(y, fy) \geq \eta(y, fy)$ kéo theo $\alpha(x, fy) \geq \eta(x, fy)$.

Tương tự khái niệm không gian metric α-đầy đủ và hàm α-liên tục trong [8], chúng tôi giới thiệu các khái niệm này trên không gian b-metric.

Định nghĩa 1.6. Cho (X,d,s) là không gian b-metric và $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ là ánh xạ. Khi đó,

(1) X được gọi là α*-đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy $\{x_n\}$ trong X thõa mãn $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ đều hội tụ.

(2) Ánh xạ $f: X \to X$ được gọi là α*-liên tục* nếu với mọi $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = fx$.

2. Kết quả chính

Trước hết chúng tôi đưa ra một số kí hiệu được sử dụng trong bài báo.

(1) $\mathcal{G}$ là họ các hàm liên tục $F: [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $s,t,u,v \in [0,\infty)$,

i) $F(s,t) \leq s$.

ii) Nếu $F(s,t) = s$ thì $s = 0$ hoặc $t = 0$.

iii) Nếu $s \leq u, t \leq v$ thì $F(s,t) \leq F(u,v)$.

(2) Ψ là họ các hàm liên tục $\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ sao cho ψ không giảm và $\psi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

(3) Φ là họ các hàm liên tục $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ sao cho $\varphi(t) > 0$ với mọi $t > 0$.

Lớp hàm $\mathcal{G}$ trong bài báo này tương tự với lớp hàm $\mathcal{C}$ trong [2] và thỏa thêm tính chất iii).

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác cho cặp ánh xạ như sau.

Định nghĩa 2.1. Cho X là tập khác rỗng, $f, g: X \to X$ và $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ là các ánh xạ. Khi đó, cặp (f,g) được gọi là α*-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác* nếu với mọi $x,y,z \in X$, ta có

(L1) $\alpha(x, fx) \geq 1$ kéo theo $\alpha(fx, gfx) \geq 1$.

(L2) $\alpha(x,y) \geq 1$ và $\alpha(y, fy) \geq 1$ kéo theo $\alpha(x, fy) \geq 1$.

(L3) $\alpha(x, gx) \geq 1$ kéo theo $\alpha(gx, fgx) \geq 1$.

(L4) $\alpha(x,y) \geq 1$ và $\alpha(y, gy) \geq 1$ kéo theo $\alpha(x, gy) \geq 1$.

Nhận xét 2.2. *Nếu f là một α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác thì (f,f) là một cặp α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác.*

Bổ đề 2.3. *Cho X là tập khác rỗng, $f, g: X \to X$ và $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ là các ánh xạ thỏa mãn các giả thiết sau.*

(1) Cặp (f,g) là α-chấp nhận được dạng tam giác.

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\alpha(x_0, fx_0) \geq 1$.

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ được định nghĩa bởi $x_{2n+1} = fx_{2n}$ và $x_{2n+2} = gx_{2n+1}$ thỏa mãn $\alpha(x_m, x_n) \geq 1$ với mọi $m,n \in \mathbb{N}$ và $m \neq n$.

Chứng minh. Vì $\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, fx_0) \geq 1$ và sử dụng (L1) của cặp (f,g), ta được $\alpha(x_1, x_2) = \alpha(fx_0, gfx_0) \geq 1$. Vì $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ và $x_2 = gx_1$ nên $\alpha(x_1, gx_1) \geq 1$. Sử dụng (L3) của cặp (f,g), ta được $\alpha(gx_1, fgx_1) \geq 1$. Điều này kéo theo $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$. Vì $x_3 = fx_2$, ta được $\alpha(x_2, fx_2) \geq 1$. Tiếp tục sử dụng (L1) ta được $\alpha(fx_2, gfx_2) \geq 1$. Suy ra $\alpha(x_3, x_4) \geq 1$. Tiếp tục tiến trình trên ta được $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giả sử $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ với $m > n$. Ta sẽ chứng minh rằng $\alpha(x_n, x_{m+1}) \geq 1$ với $m > n$. Nếu m lẻ thì $\alpha(x_m, gx_m) = \alpha(x_m, x_{m+1}) \geq 1$. Chú ý rằng $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$. Sử dụng (L4) ta có $\alpha(x_n, x_{m+1}) = \alpha(x_n, gx_m) \geq 1$. Nếu m chẵn thì $\alpha(x_m, fx_m) = \alpha(x_m, x_{m+1}) \geq 1$. Tiếp tục sử dụng $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ và (L2) ta được $\alpha(x_n, x_{m+1}) = \alpha(x_n, fx_m) \geq 1$. Vì vậy, $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ với mọi $m > n$. □

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu khái niệm ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ và ψ-φ-F_k-co dạng hữu tỉ cho cặp ánh xạ trên không gian b-metric.

Định nghĩa 2.4. Cho X là tập khác rỗng, $f,g:X\to X$ và $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ là các ánh xạ. Khi đó, cặp (f,g) được gọi là ψ-φ-F-*co dạng hữu tỉ* nếu tồn tại $\psi\in\Psi$, $\varphi\in\Phi$ và $F\in\mathcal{G}$ sao cho với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$ và $\alpha(x,y)\geq 1$, ta có

$$\psi\left(s^2d(fx,gy)\right)\leq F\left(\psi\left(H(x,y)\right),\varphi\left(H(x,y)\right)\right) \quad (2.1)$$

trong đó

$$H(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,fx),d(y,gy),\frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2s},\frac{d(x,fx)d(y,gy)}{d(x,y)}\right\}.$$

Định nghĩa 2.5. Cho X là tập khác rỗng, $f,g:X\to X$ và $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ là các ánh xạ. Khi đó, cặp (f,g) được gọi là ψ-φ-F_k-*co dạng hữu tỉ* nếu tồn tại $\psi\in\Psi$, $\varphi\in\Phi$ và $F\in\mathcal{G}$ sao cho với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$ và $\alpha(x,y)\geq 1$, ta có

$$\psi\left(s^2d(fx,gy)\right)\leq F\left(\psi\left(H_k(x,y)\right),\varphi\left(H_k(x,y)\right)\right) \quad (2.2)$$

trong đó

$$H_k(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,fx),d(y,gy),\frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2s},\frac{d(x,fx)d(y,gy)}{k+d(x,y)}\right\}.$$

Sau đây là điều kiện đủ cho sự tồn tại điểm bất động chung của cặp ánh xạ thỏa mãn ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ và ψ-φ-F_k- co dạng hữu tỉ cho cặp ánh xạ trên không gian b-metric.

Định lí 2.6. *Cho (X,d,s) là không gian b-metric α-đầy đủ, $f,g:X\to X$ và $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) Cặp (f,g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác.

(2) Cặp (f,g) là ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ.

(3) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $\alpha(x_0,fx_0)\geq 1$.

(4) f và g là α-liên tục.

Khi đó f hoặc g có điểm bất động hoặc f và g có điểm bất động chung.

Chứng minh. Trước hết, ta định nghĩa dãy $\{x_n\}$ trong X như sau $x_{2n+1}=fx_{2n}$ và $x_{2n+2}=gx_{2n+1}$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, trong đó $\alpha(x_0,fx_0)\geq 1$. Nếu tồn tại $n\in\mathbb{N}$ sao cho $x_{2n}=x_{2n+1}$ thì $x_{2n}=fx_{2n}$, tức là x_{2n} là điểm bất động của f. Tương tự, nếu tồn tại $n\in\mathbb{N}$ sao cho $x_{2n+1}=x_{2n+2}$ thì $x_{2n+1}=gx_{2n+1}$, tức là x_{2n+1} là điểm bất động của g. Bây giờ ta giả sử $x_n\neq x_{n+1}$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Vì cặp (f,g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác nên sử dụng Bổ đề 2.3, ta được bất đẳng thức sau với mọi $m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$

$$\alpha(x_n,x_m)\geq 1. \quad (2.3)$$

Vì (f,g) là ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ nên sử dụng (2.3), ta được

$$\psi\left(d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right)\leq\psi\left(s^2d(fx_{2n},gx_{2n+1})\right)$$
$$\leq F\left(\psi\left(H(x_{2n},x_{2n+1})\right),\varphi\left(H(x_{2n},x_{2n+1})\right)\right) \quad (2.4)$$

trong đó

$$H(x_{2n},x_{2n+1})$$
$$=\max\Big\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n},fx_{2n}),d(x_{2n+1},gx_{2n+1}),$$
$$\frac{d(x_{2n},gx_{2n+1})+d(x_{2n+1},fx_{2n})}{2s},\frac{d(x_{2n},fx_{2n})d(x_{2n+1},gx_{2n+1})}{d(x_{2n},x_{2n+1})}\Big\}$$
$$=\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2}),\frac{d(x_{2n},x_{2n+2})}{2s}\right\}$$
$$\leq\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2}),\frac{d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})}{2}\right\}$$
$$=\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right\}.$$

Nếu tồn tại $n\in\mathbb{N}$ sao cho

$$\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right\}=d(x_{2n+1},x_{2n+2})>0$$

thì (2.4) trở thành

$$\psi\left(d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right)\leq F\left(\psi\left(d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right),\varphi\left(d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right)\right)$$

$<\psi\big(d(x_{2n+1},x_{2n+2})\big)$. Điều này vô lí. Do đó,

$$\max\left\{d(x_{2n},x_{2n+1}),d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right\}=d(x_{2n},x_{2n+1})>0$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$. Khi đó, (2.4) trở thành

$$\psi\left(d(x_{2n+1},x_{2n+2})\right)\leq F\left(\psi\left(d(x_{2n},x_{2n+1})\right),\varphi\left(d(x_{2n},x_{2n+1})\right)\right)$$
$$<\psi\left(d(x_{2n},x_{2n+1})\right) \quad (2.5)$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$. Hơn nữa, ψ là hàm không giảm nên ta được

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leq d(x_{2n},x_{2n+1}) \quad (2.6)$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$. Mặt khác, từ (2.3) và (f,g) là ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ, ta được

$$\psi\left(d(x_{2n+1},x_{2n})\right)$$
$$\leq\psi\left(s^2d(fx_{2n},gx_{2n-1})\right)$$
$$\leq F\left(\psi\left(H(x_{2n},x_{2n-1})\right),\varphi\left(H(x_{2n},x_{2n-1})\right)\right).$$

Tương tự lập luận trên, ta cũng được

$$d(x_{2n+1},x_{2n})\leq d(x_{2n},x_{2n-1}) \quad (2.7)$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Từ (2.6) và (2.7), ta được $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ là dãy số giảm không âm. Do đó, tồn tại $r \geq 0$ sao cho $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r.$ Khi đó, lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong (2.5), ta được $\psi(r) \leq F\big(\psi(r), \varphi(r)\big).$ Điều này kéo theo $F\big(\psi(r), \varphi(r)\big) = \psi(r).$ Suy ra $\psi(r) = 0$ hoặc $\varphi(r) = 0.$ Suy ra $r = 0.$ Vậy ta có

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \qquad (2.8)$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do (2.8) nên ta chỉ cần chứng minh $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy. Giả sử ngược lại rằng $\{x_{2n}\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và hai dãy số nguyên dương $\{m(k)\}$ và $\{n(k)\}$ trong đó $n(k)$ là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn $n(k) > m(k) > k,$

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) \geq \varepsilon, \qquad (2.9)$$

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-2}) < \varepsilon. \qquad (2.10)$$

Sử dụng (2.9) và (2.10), ta được

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)})\\ &\leq sd(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-2}) + s^2 d(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)-1}) + s^2 d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)})\\ &< s\varepsilon + s^2 d(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)-1}) + s^2 d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)})\\ &\leq sd(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) + sd(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) &\leq sd(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-2}) + sd(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)-1})\\ &< \varepsilon s + sd(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)-1}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)})\\ &\leq sd(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}) + sd(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}).\end{aligned}$$

$$d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}) \leq sd(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) + sd(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)}).$$

$$d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) \leq sd(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}) + sd(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}).$$

Lấy giới hạn trên khi $k \to \infty$ trong các bất đẳng thức trên và sử dụng (2.8), ta được

$$\varepsilon \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) \leq \varepsilon s. \qquad (2.11)$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \leq \varepsilon s. \qquad (2.12)$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}). \qquad (2.13)$$

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) \leq \varepsilon s^2. \qquad (2.14)$$

Vì $\lim_{k\to\infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) = \varepsilon > 0$ nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) > 0$ với mọi $k \geq k_0$. Với mọi $k \geq k_0$, ta có $2m(k) < 2n(k) - 1$ và sử dụng (2.3), ta được $\alpha(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \geq 1.$

Do đó,

$$\begin{aligned}&\psi\big(s^2 d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)})\big)\\ &= \psi\big(s^2 d(fx_{2m(k)}, gx_{2n(k)-1})\big)\\ &\leq F\Big(\psi\big(H(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1})\big), \varphi\big(H(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1})\big)\Big) \qquad (2.15)\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}&H(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1})\\ &= \max\Big\{d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}), d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}), d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)}),\\ &\frac{d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) + d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1})}{2s}, \frac{d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}) d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)})}{d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1})}\Big\}. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

Lấy giới hạn khi $k \to \infty$ trong (2.16) và sử dụng (2.8), (2.11) - (2.14), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} H(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \leq \max\left\{\varepsilon s, 0, 0, \frac{\varepsilon s + \varepsilon s^2}{2s}, 0\right\} = \varepsilon s. \qquad (2.17)$$

Lấy giới hạn trên trong (2.15), sử dụng tính liên tục của F, ψ, φ và (2.13), (2.17), ta được $\psi(\varepsilon s) \leq F\big(\psi(\varepsilon s), \varphi(\varepsilon s)\big).$ Theo tính chất của F ta được $\psi(\varepsilon s) = 0$ hoặc $\varphi(\varepsilon s) = 0.$ Từ đó suy ra $\varepsilon = 0.$ Điều này mâu thuẫn với $\varepsilon > 0.$ Vì vậy, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X. Vì X là α-đầy đủ nên tồn tại $x \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x.$ Vì f và g là α-liên tục nên

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} fx_{2n} = fx$$

và

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} gx_{2n+1} = gx.$$

Do đó, x là điểm bất động chung của f và g.

Định lí 2.7. *Cho (X, d, s) là không gian b-metric α-đầy đủ, $f, g: X \to X$ và $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) Cặp (f, g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác.

(2) Cặp (f, g) là ψ-φ-F_k-co dạng hữu tỉ.

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $\alpha(x_0, fx_0) \geq 1.$

(4) Nếu dãy $\{x_n\}$ trong X thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $\alpha(x_{2n}, x) \geq 1$ và $\alpha(x, x_{2n+1}) \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}.$

Khi đó f hoặc g có điểm bất động hoặc f và g có điểm bất động chung.

Chứng minh. Tương tự như trong chứng minh Định lí 2.6, ta được dãy $\{x_n\}$ được định nghĩa bởi $x_{2n+1} = fx_{2n}$ và $x_{2n+2} = gx_{2n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\alpha(x_n, x_m) \ge 1, \tag{2.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{2.19}$$

với mọi $n, m \in \mathbb{N}$ và $n > m$ và tồn tại $x \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x. \tag{2.20}$$

Theo giả thiết (4), ta được $\alpha(x_{2n}, x) \ge 1$ và $\alpha(x, x_{2n+1}) \ge 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $\alpha(x_{2n}, x) \ge 1$ và (f, g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác nên ta có

$$\psi\left(s^2 d(x_{2n+1}, gx)\right) = \psi\left(s^2 d(fx_{2n}, gx)\right) \le F\left(\psi\left(H_k(x_{2n}, x)\right), \varphi\left(H_k(x_{2n}, x)\right)\right) \tag{2.21}$$

trong đó

$$H_k(x_{2n}, x) = \max\left\{d(x_{2n}, x), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x, gx), \frac{d(x_{2n}, gx) + d(x, x_{2n+1})}{2s}, \frac{d(x_{2n}, x_{2n+1})d(x, gx)}{k + d(x, x_{2n})}\right\} \tag{2.22}$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong (2.22) và sử dụng (2.19), (2.20), ta được

$$\lim_{n\to\infty} H_k(x_{2n}, x) = d(x, gx). \tag{2.23}$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong (2.21), sử dụng tính liên tục của F, ψ, φ và (2.23), ta được $\psi\left(d(x, gx)\right) \le F\left(\psi(d(x, gx)), \varphi(d(x, gx))\right)$. Sử dụng tính chất của F, ta được $\psi\left(d(x, gx)\right) = 0$ hoặc $\varphi\left(d(x, gx)\right) = 0$. Điều này kéo theo $d(x, gx) = 0$. Suy ra $gx = x$. Lập luận tương tự với $\alpha(x, x_{2n+1}) \ge 1$, ta được $fx = x$. Vậy x là điểm bất động chung của f và g. □

Sau đây, chúng tôi trình bày điều kiện đủ cho sự tồn tại duy nhất điểm bất động chung của cặp ánh xạ thỏa mãn điều kiện ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ và ψ-φ-F_k-co dạng hữu tỉ trên không gian b-metric.

Định lí 2.8. *Giả sử các giả thiết trong Định lí 2.6 được thỏa mãn. Khi đó, nếu với mọi $x, y \in X$, $x \ne y$, tồn tại $z \in X$ sao cho $\alpha(z, fz) \ge 1$, $\alpha(x, z) \ge 1$ và $\alpha(y, z) \ge 1$ thì f hoặc g có điểm bất động hoặc f và g có duy nhất một điểm bất động chung.*

Chứng minh. Theo Định lí 2.6, f hoặc g có điểm bất động hoặc f và g có điểm bất động chung. Giả sử x, y là hai điểm bất động chung của f, g và $x \ne y$. Theo giả thiết, tồn tại $z \in X$ sao cho $\alpha(z, fz) \ge 1$, $\alpha(x, z) \ge 1$. Vì (f, g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác nên $\alpha(x, fz) \ge 1$. Sử dụng $\alpha(z, fz) \ge 1$ và Định lí 2.6, ta được

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \tag{2.24}$$

trong đó $z^* \in X$ và $\{z_n\}$ được định nghĩa bởi $z_0 = z$, $z_{2n+1} = fz_{2n}$ và $z_{2n+2} = gz_{2n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Hơn nữa, $\alpha(x, z_1) = \alpha(x, fz) \ge 1$ và (f, g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác. Do đó, $\alpha(x, z_2) = \alpha(fx, gz_1) \ge 1$. Điều này kéo theo $\alpha(x, z_3) = \alpha(gx, fz_2) \ge 1$. Tiếp tục tiến trình trên ta được $\alpha(x, z_n) \ge 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1. Nếu tồn tại $z_{n_0} \in X$ sao cho $z_{n_0} = x$ thì

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x. \tag{2.25}$$

Sử dụng (2.24) và (2.25), ta được $x = z^*$.

Trường hợp 2. Nếu $z_n \ne x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì sử dụng (2.1), ta được

$$\psi\left(s^2 d(x, z_{2n+2})\right) = \psi\left(s^2 d(fx, gz_{2n+1})\right) \le F\left(\psi\left(H(x, z_{2n+1})\right), \varphi\left(H(x, z_{2n+1})\right)\right) \tag{2.26}$$

trong đó

$$\begin{aligned} H(x, z_{2n+1}) &= \max\left\{d(x, z_{2n+1}), d(x, fx), d(z_{2n+1}, gz_{2n+1}), \frac{d(x, gz_{2n+1}) + d(z_{2n+1}, fx)}{2s}, \frac{d(x, fx)d(z_{2n+1}, gz_{2n+1})}{d(x, z_{2n+1})}\right\} \\ &= \max\left\{d(x, z_{2n+1}), d(z_{2n+1}, z_{2n+2}), \frac{d(x, z_{2n+2}) + d(z_{2n+1}, x)}{2s}\right\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong (2.27), ta được

$$\limsup_{n\to\infty} H(x, z_{n+1}) \le sd(x, z^*). \tag{2.28}$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ trong (2.26), kết hợp sử dụng tính chất của φ, ψ, F, Bổ đề 1.3 và (2.28), ta được

$$\psi\left(sd(x, z^*)\right) \le F\left(\psi\left(sd(x, z^*)\right), \varphi\left(sd(x, z^*)\right)\right). \tag{2.29}$$

Từ (2.29) và sử dụng tính chất của F, ta được $\psi\left(sd(x, z^*)\right) = 0$ hoặc $\varphi\left(sd(x, z^*)\right) = 0$. Suy ra $d(x, z^*) = 0$. Tức là $x = z^*$.

Từ hai trường hợp trên, ta đều có $x = z^*$. Tương tự, ta cũng có $y = z^*$. Vì vậy, $x = y$. Do đó, điểm bất động chung của f và g là duy nhất. □

Định lí 2.9. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.7 được thỏa mãn. Nếu với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$, tồn tại $z\in X$ sao cho $\alpha(z,fz)\geq 1$, $\alpha(x,z)\geq 1$ và $\alpha(y,z)\geq 1$ thì f hoặc g có điểm bất động hoặc f và g có điểm bất động chung duy nhất.*

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Định lí 2.8. □

Các hệ quả sau được suy ra từ các Định lí 2.6, Định lí 2.7, Định lí 2.8 và Định lí 2.9.

Hệ quả 2.10. *Cho (X,d,s) là không gian b-metric α-đầy đủ, $f:X\to X$ và $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) f là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác.

(2) Với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$, tồn tại $\psi\in\Psi$, $\varphi\in\Phi$ và $F\in\mathcal{G}$ sao cho

$$\alpha(x,y)\psi\left(s^2d(fx,fy)\right)\leq F\left(\psi\left(H^f(x,y)\right),\varphi\left(H^f(x,y)\right)\right)$$

trong đó

$$H^f(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),\frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2s},\frac{d(x,fx)d(y,fy)}{d(x,y)}\right\}.$$

(3) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $\alpha(x_0,fx_0)\geq 1$.

(4) f là α-liên tục.

Khi đó, f có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$, tồn tại $z\in X$ sao cho $\alpha(z,fz)\geq 1$, $\alpha(x,z)\geq 1$ và $\alpha(y,z)\geq 1$ thì f có điểm bất động duy nhất.

Hệ quả 2.11. *Cho (X,d,s) là không gian b-metric α-đầy đủ, $f,g:X\to X$ và $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ là các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) f là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác.

(2) Với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$, tồn tại $\psi\in\Psi$, $\varphi\in\Phi$ và $F\in\mathcal{G}$ sao cho

$$\alpha(x,y)\psi\left(s^2d(fx,fy)\right)\leq F\left(\psi\left(H_k{}^f(x,y)\right),\varphi\left(H_k{}^f(x,y)\right)\right)$$

trong đó

$$H_k{}^f(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),\frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2s},\frac{d(x,fx)d(y,fy)}{k+d(x,y)}\right\}.$$

(3) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $\alpha(x_0,fx_0)\geq 1$.

(4) Nếu dãy $\{x_n\}$ trong X thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ và $\alpha(x_n,x_{n+1})\geq 1$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì $\alpha(x_n,x)\geq 1$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Khi đó, f có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$, tồn tại $z\in X$ sao cho $\alpha(z,fz)\geq 1$, $\alpha(x,z)\geq 1$ và $\alpha(y,z)\geq 1$ thì f có điểm bất động duy nhất.

Nhận xét 2.12. *Trong Hệ quả 2.10 và Hệ quả 2.11, bằng cách chọn $F(s,t)=s\beta(s)$ với mọi $s,t\in[0,\infty)$ trong đó $\beta:[0,\infty)\to[0,1)$ là hàm liên tục và không giảm, ta được các kết quả có thể xem là mở rộng của các kết quả trong [7], [9] trên không gian b-metric với giả thiết "$\lim\limits_{n\to\infty}\beta(t_n)=0$ kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$" được thay bởi "$\beta$ liên tục và không giảm."*

Nhận xét 2.13. *Theo [3, Định lí 2.2], các kết quả trong bài viết này có thể suy ra được các kết quả tương ứng cho ánh xạ α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác tương ứng với η. Khi đó, từ Hệ quả 2.10 và Hệ quả 2.11 ta suy ra được các kết quả tương tự như [2, Định lí 2.3, Định lí 2.4, Định lí 2.5] xét trên không gian b-metric. Từ Hệ quả 2.10, Hệ quả 2.11 và Nhận xét 2.12 ta suy được các kết quả tương tự [8, Định lí 2.7, Định lí 2.8, Định lí 2.9] xét trên không gian b-metric với giả thiết "$\lim\limits_{n\to\infty}\beta(t_n)=1$ kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$" được thay bởi "$\beta$ liên tục và không giảm."*

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ sau minh họa cho Định lí 2.6.

Ví dụ 2.14. Xét không gian b-metric đầy đủ (X,d,s) với $X=\{1,2,3,4\}$, $s=\frac{3}{2}$,

$$d(x,y)=\begin{cases}0 \text{ khi } (x,y)\in\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}\\ \frac{1}{3} \text{ khi } (x,y)\in\{(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}\\ \frac{1}{2} \text{ khi } (x,y)\in\{(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)\}\\ 1 \text{ khi } (x,y)\in\{(1,2),(1,4),(2,1),(4,1)\}\end{cases}$$

và các hàm $f,g:X\to X$ xác định bởi

$f1=f2=1,\ f3=4,\ f4=3,\ g1=1,\ g2=g4=3,\ g3=2,$

$\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\psi(t)=t$, $\forall t\in[0,\infty)$,

$F:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(s,t)=s\beta(s)$ trong đó β xác định bởi $\beta(s)=\frac{s}{1+s}$, $\forall s\in[0,\infty)$,

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1 \text{ khi } (x,y)\in\{(1,1),(2,1),(2,4),(4,2)\}\\ 0 \quad \text{các trường hợp còn lại.}\end{cases}$$

Khi đó, f và g thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.6.

Chứng minh. Ta kiểm tra (f,g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác. Thật vậy, ta có

$$\alpha(1,f1)=\alpha(1,1)\geq 1,$$
$$\alpha(f1,gf1)=\alpha(1,1)\geq 1,$$
$$\alpha(1,g1)=\alpha(1,1)\geq 1,$$
$$\alpha(g1,fg1)=\alpha(1,1)\geq 1,$$
$$(2,f2)=\alpha(2,1)\geq 1,$$

các trường hợp còn lại luôn đúng. Do đó, (f,g) là α-chấp nhận được theo quỹ đạo dạng tam giác. Bây giờ ta kiểm tra (f,g) là ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ. Với mọi $x,y\in X$, $x\neq y$ và $\alpha(x,y)\geq 1$, khi đó $(x,y)\in\{(2,1),(2,4),(4,2)\}$. Ta có,

$$\psi\left(s^2 d(fx,gy)\right)\leq F\left(\psi\left(H(x,y)\right),\varphi\left(H(x,y)\right)\right)$$

tương đương với

$$s^2 d(fx,gy)\leq \frac{H^2(x,y)}{1+H(x,y)}$$

trong đó $H(x,y)$ được xác định như trong Định nghĩa 2.4. Ta có

$$d(f2,g1)=d(f4,g2)=0, d(f2,g4)=1,$$

$$H(2,4)=\frac{d(2,f2).d(4,g4)}{d(2,4)}=3,$$

$$s^2 d(f2,g4)=\frac{9}{4}=\frac{H^2(2,4)}{1+H(2,4)}.$$

Do đó (f,g) là ψ-φ-F-co dạng hữu tỉ. Các giả thiết còn lại của Định lí 2.6 cũng được thỏa mãn. Do đó bài toán thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.6. □

Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với đề tài mã số CS2015.01.36./.

Tài liệu tham khảo

[1]. M. Abbas, A. Aghaiani and J. R. Roshan (2014), "Common fixed point of generalized weak contractive mapping in partially order b-metric spaces", *Math. Slovaca*, 64 (4), p. 914-960.

[2]. A. Ansari and K. Kaewcharoen (2016), "Fixed point theorems for α-Geraghty contraction type maps in metric spaces", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9 (2016), p. 4177-4190.

[3]. M. Berzig and E. Karapina (2015), "Note on "Modified α-ψ-contractive mappings with applications"", *Thai. F. Math.*, 13 (1), p. 147-152.

[4]. S. Czerwik (1998), "Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46 (2), p. 263-276.

[5]. M. Geraghty (1973), "On contractive mappings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (40), p. 604-608.

[6]. H. Huang, L. Paunovi´c and S. Radenovi´c (2015), "On some new fixed point results for rational Geraghty contractive mappings in ordered *b*-metric spaces", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, (8), p. 800-807.

[7]. E. Karapinar (2014), "α-ψ-Geraghty contraction type mappings and some related fixed point results", *Filomat*, (28), p. 37-48.

[8]. S. Plubtieng, P. Chuadchawna and A. Kaewcharoen (2016), "Fixed point theorems for generalized α-η-ψ-Geraghty contraction type mappings in α-η-complete metric spaces", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, (9), p. 471-485.

[9]. O. Popescu (2014), "Some new fixed point theorems for α-Geraghty contraction type maps in metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2014), p. 1-12.

[10]. R. J. Shahkoohi and A. Razani (2014), "Some fixed point theorems for rational Geraghty contractive mappings in ordered *b*-metric spaces", *J. Inequal. Appl.*, (2014:373), p. 1-23.

THE EXISTENCE OF COMMON FIXED POINT FOR GENERALIZED RATIONAL CONTRACTION MAPPINGS IN b-METRIC SPACES

Summary

This paper is to establish and prove some common fixed point results for generalized rational contraction mappings in b-metric spaces. Also, illustrative examples are provided for the results obtained.

Keywords: Common fixed point, b-metric spaces, Geraghty contraction, triangular α-orbital admissible.

Ngày nhận bài: 22/5/2018; Ngày nhận lại: 11/6/2018; Ngày duyệt đăng: