KHẢO SÁT TẬP LŨY ĐẲNG TRONG ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT CỦA ĐỒ THỊ KHÔNG CHỨA CHU TRÌNH

• Phạm Thị Hương Trà(*), Ngô Tấn Phúc(**)

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi mô tả tập lũy đẳng của đại số đường đi Leavitt với hệ tử trên trường của một đồ thị hữu hạn không chứa chu trình.

Từ khóa: Đại số đường đi Leavitt, Tập lũy đẳng.

1. Mở đầu

Đại số đường đi Leavitt được giới thiệu một cách độc lập bởi Abrams - Aranda Pino [2] và Ara - Moreno - Pardo [3] vào năm 2005, nó có thể xem như là một biến thể "đại số" của đại số Cuntz-Krieger, một đối tượng quan trọng trong chuyên ngành nghiên cứu $\mathbb{C}^*$-đại số. Sau đó, trong [1], tác giả đã chỉ ra lí do đại số đường đi Leavitt trở thành một trong những đối tượng được quan tâm không chỉ bởi nhiều nhà đại số mà còn có cả những nhà giải tích.

Trong một vành *R*, tập các phần tử khả nghịch, tập các phần tử lũy linh và tập các phần tử lũy đẳng là ba đối tượng rất được quan tâm nghiên cứu bởi sự tương quan giữa chúng và cấu trúc nội tại của vành. Có thể liệt kê một số kết quả nổi bật theo hướng này như sau: Năm 1977, trong [7], Nicholson đã đề xuất lớp vành mà mỗi phần tử có thể phân tích thành tổng của một phần tử lũy đẳng và một phần tử khả nghịch. Năm 2013, Diesl [5] giới thiệu và nghiên cứu lớp vành thỏa mãn tính chất rằng mỗi phần tử của nó đều là tổng của một phần tử lũy đẳng và một phần tử lũy linh. Gần đây, Calugareanu và Lam [4] đã đề xuất lớp vành mà mọi phần tử là tổng của một phần tử lũy linh và một phần tử khả nghịch. Các lớp vành này liên quan đến một giả thuyết nổi tiếng là giả thiết Kothe [6].

Để áp dụng các kết quả nêu trên vào đại số đường đi Leavitt, vấn đề được đặt ra một cách tự nhiên là phải tính toán được các tập hợp đặc biệt nói trên cho lớp đại số này. Trong bài viết, chúng tôi mô tả tập lũy đẳng của một đại số đường đi Leavitt của đồ thị hữu hạn không chứa chu trình.

2. Đại số đường đi Leavitt

Trong phần này chúng tôi dựa vào [2] để nhắc lại một số khái niệm về đồ thị trực tiếp và đại số đường đi Leavitt.

Một đồ thị $E=(E^0,E^1,s,r)$ là một bộ bao gồm hai tập hợp E^0 và E^1 và hai ánh xạ $r,s:E^0\to E^1$. Các phần tử của E^0 được gọi là các *đỉnh* và các phần tử của E^1 được gọi là các *cạnh*. Đối với mỗi cạnh e trong E^1, $s(e)$ được gọi là *điểm đầu* của e và $r(e)$ được gọi là *điểm cuối* của *e*. Đồ thị E được gọi là *hữu hạn* nếu các tập E^0 và E^1 là các tập hữu hạn phần tử. Một *đường đi* trong một đồ thị E là chuỗi các cạnh $p=e_1e_2...e_n$ sao cho $r(e_i)=s(e_{i+1})$ với mọi $i=1,2,...,n-1$.

Một đường đi được gọi là một *chu trình* nếu $s(p)=r(p)$ và $s(e_i)\neq s(e_j)$ đối với mọi $i\neq j$. Nói cách khác, một chu trình là một đường đi mà bắt đầu và kết thúc trên cùng một đỉnh và không đi qua bất kì đỉnh nào quá một lần.

Cho một đồ thị trực tiếp $E=(E^0,E^1,s,r)$ và một trường bất kì K, *đại số đường đi Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ tử trên K là một K-đại số sinh bởi tập E^0 và E^1, cùng với tập cạnh ảo $\{e^*\mid e\in E^1\}$, thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $v,w\in E^0$ và $e,f\in E^1$:

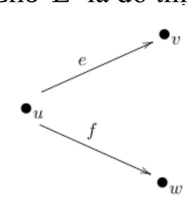
(1) $vw=\delta_{v,w}w$;

(2) $s(e)e=e=er(e)$ và $r(e)e^*=e^*=e^*s(e)$;

(3) $e^*f=\delta_{e,f}r(e)$.

(4) $v=\sum_{e\in s^{-1}(v)} ee^*$ với mọi đỉnh chính quy v.

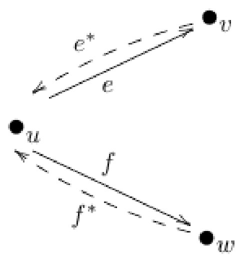
Ví dụ 1. Cho E là đồ thị có hướng như sau.



Hình 1. Đồ thị có hướng *E*

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

Khi đó $L_K(E)$ là K-đại số có tập sinh là $\{u, v, w, e, f, e^*, f^*\}$ được mô tả như sau



Hình 2. Hệ sinh của $L_K(E)$

và thỏa các đồng nhất thức:

(1) $uu = u, vv = v, ww = w,$
$uv = uw = vw = vu = wu = wv = 0.$

(2) $ev = ue = e,\ fw = uf = f,\ e^*.u = ve^* = e^*,$
$f^*u = wf^* = f^*.$

(3) $e^*e = v,\ f^*f = w, e^*f = f^*e = 0.$

(4) $u = ee^* + ff^*.$

Trong $L_K(E)$, một đa thức $e_1e_2\ldots e_n f_1^* f_2^* \ldots f_m^*$ được gọi là *có độ dài m*, kí hiệu là $|e_1e_2\ldots e_n f_1^* f_2^* \ldots f_m^*| = m.$

Trong vành R, phần tử $e \in R$ được gọi là *phần tử lũy đẳng* nếu $e^2 = e$, hai phần tử $e, f \in R$ được gọi là *trực giao* nếu $e.f = 0$, tập hợp $\{e_1, e_2, ..., e_r\} \subset R$ được gọi là *tập lũy đẳng trực giao* nếu các phần tử là lũy đẳng và đôi một trực giao với nhau.

3. Kết quả chính

Trong toàn bộ phần này, ta giả sử E là đồ thị hữu hạn với tập đỉnh là $E^0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Bổ đề 1. *Cho tập $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ là tập các lũy đẳng trực giao trong vành R. Khi đó tổng tùy ý*

$$\sum_{i \in I} e_i, \mathrm{I} \subset \{1, ..., \mathrm{r}\}$$

cũng là một phần tử lũy đẳng trong R.

Chứng minh.

Gọi f là một tổng của k $(1 \le k \le r)$ phần tử bất kỳ trong tập $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$. Bằng cách đánh số lại các phần tử, ta có thể gọi $f = \sum_{i=1}^{k} e_i$.

Ta cần chứng minh $f^2 = f$.

Với $k = 1$, $f = e_1$. Ta có $f^2 = e_1^2 = e_1 = f$.

Với $k > 1$, $f = \sum_{i=1}^{k} e_i$. Ta có

$$f^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} e_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} e_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} e_i e_j.$$

Do $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ là tập lũy đẳng trực giao nên với mọi $1 \le i \ne j \le k$ ta có $e_i e_j = 0$ và $e_i^2 = e_i$. Vậy $f^2 = \sum_{i=1}^{k} e_i = f$. □

Mệnh đề 1. *Cho $L_K(E)$ là đại số đường đi Leavitt của đồ thị hữu hạn E với hệ số trên trường K. Các phần tử có dạng một tổng hữu hạn*

$$\sum_{i \in I} v_i,$$

trong đó $I \subset \{1, \ldots, n\}$ là các phần tử lũy đẳng trong $L_K(E)$.

Chứng minh. Gọi $f = \sum_{i \in I} v_i$ là một tổng hữu hạn trong $L_K(E)$.

Giả sử f là một tổng của k số hạng. Không mất tính tổng quát, ta có thể đánh số lại các đỉnh trong E^0 sao cho $f = \sum_{1 \le i \le k} v_i$.

Theo định nghĩa ta có $v_i.v_j = 0$ và $v_i^2 = v_i$ với mọi $1 \le i \ne j \le k$. Do đó $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ là tập lũy đẳng trực giao trong $L_K(E)$.

Áp dụng Bổ đề 1 suy ra $f = \sum_{i \in I} v_i$ là các phần tử lũy đẳng trong $L_K(E)$. □

Ta nhắc lại bổ đề sau đây trong bài báo đầu tiên về đại số đường đi Leavitt.

Bổ đề 2 ([2], Lemma 1.5). *Các đơn thức trong đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ gồm một trong hai loại sau:*

Loại (I): kv trong đó $k \in K, v \in E^0$.

Loại (II): kpq^* trong đó $k \in K$, p và q là các đường đi trong $L_K(E)$ sao cho $r(p) = r(q)$.

Mệnh đề 2. *Trong đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ với E là đồ thị không chứa chu trình, mọi* *đơn thức có độ dài khác 0 đều không là phần tử lũy đẳng.*

Chứng minh.

Gọi f là một đơn thức có độ dài khác 0 trong $L_k(E)$. Theo Bổ đề 2, f có dạng: $f = kpq^*$ trong đó $k \in K$, p và q là các đường đi trong $L_K(E)$ sao cho $r(p) = r(q)$. Vì $f \neq 0$ nên $p \neq q$. Do đó $|q^* p| > 0$. Vậy $f^2 = k^2 pq^* pq^*$ có độ dài lớn hơn hẳn độ dài của $f = kpq^*$ hay $f^2 \neq f$. Vậy f không là phần tử lũy đẳng. □

Định lí 1. *Cho $L_K(E)$ là đại số đường đi Leavitt của đồ thị hữu hạn E với hệ số trên trường K. Nếu K là trường có nhiều hơn hai phần tử thì tập lũy đẳng trong $L_K(E)$ là*

$$\left\{ f = \sum_{i \in I} v_i \right\}_{I \subset \{1,\ldots,n\}}.$$

Chứng minh.

Theo Mệnh đề 2, nếu f là một đơn thức loại (II) trong $L_K(E)$ thì f không là phần tử lũy đẳng. Nếu f là một đơn thức loại (I) trong $L_K(E)$ có dạng $f = kv, v \in E^0, k \neq 1$ thì $f^2 = k^2 v \neq kv = f$ nên f cũng không là phần tử lũy đẳng. Kết hợp với Mệnh đề 1 ta có được điều phải chứng minh. □

Như vậy, khi đồ thị hữu hạn E không chứa chu trình thì tập lũy đẳng trong $L_K(E)$ đã được mô tả cụ thể. Ngược lại, nếu E là vô hạn hoặc chứa chu trình thì tập lũy đẳng trong $L_K(E)$ là phức tạp hơn rất nhiều. Chẳng hạn ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2. Cho E là đồ thị hữu hạn

Hình 3. Đồ thị chứa chu trình

Khi đó tập lũy đẳng trực giao trong $L_K(E)$ chứa tập vô hạn sau đây

$$\left\{ e^i f f^* (e^*)^i \right\}_{i \geq 1}.$$

Bài báo được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên mã số SPD2017.02.37./.

Tài liệu tham khảo

[1]. G. Abrams (2015), "Leavitt path algebras: the first decade", *Bulletin of Mathematical Sciences*, (5), p. 59-120.

[2]. G. Abrams and G. Aranda Pino (2005), "The Leavitt path algebra of a graph", *Journal of Algebra*, (293), p. 319-334.

[3]. P. Ara, M. A. Moreno, E. Pardo (2007), "Nonstable K-theory path algebras", *Algebras and Representation Theory*, (10), p. 157-178.

[4]. G. Calugareanu, T.Y.Lam (2016), "Fine rings: A new class of simple rings", *Journal of Algebra and Its Applications*, (15), 1650173 (18 pages).

[5]. A. J. Diesl (2013), "Nil clean rings", *Journal of Algebra*, (383), p. 197-121.

[6]. J. Matczuk (2016), "Conjugate (nil) clean rings and Kothe's problem", *Journal of Algebra and Its Applications*, Doi: 10.1142/S0219498817500736.

[7]. W. K. Nicholson (1977), "Lifting idempotents and exchange rings", *Transactions of the AMS*, (229), p. 269-278.

INVESTIGATING THE SET OF IDEMPOTENTS OF LEAVITT PATH ALGEBRA OF THE ACYCLIC GRAPHS

Summary

In this paper, we calculate the set of idempotents of the Leavitt path algebra of the acyclic graphs with coefficients in a field.

Keywords: Leavitt path algebra, set of idempotent.

Ngày nhận bài: 12/4/2018; Ngày nhận lại: 04/5/2018; Ngày duyệt đăng: 05/6/2018.