VỀ BÀI TOÁN TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

• Võ Xuân Mai(*), Lê Ngô Nhật Huy(**)

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi hệ thống hóa các phương pháp giải bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng trong không gian với các hướng tiếp cận khác nhau: sử dụng kĩ thuật rời điểm, sử dụng phương pháp thể tích hai lần, phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ; đồng thời minh họa bằng một ví dụ cụ thể cho tất cả các phương pháp giải trên nhằm trang bị cho học sinh nhiều góc nhìn khác nhau về các phương pháp để giải bài toán này.

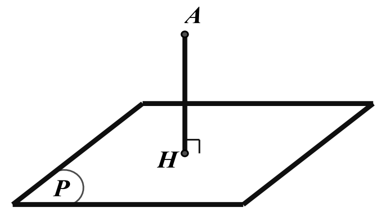
Từ khóa: Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, phương pháp giải, hình học không gian.

1. Đặt vấn đề

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng là một trong những dạng toán thường gặp trong các kì thi tuyển sinh Đại học, nay là kì thi trung học phổ thông quốc gia. Đây là dạng toán cơ bản làm nền tảng để giải bài toán tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và bài toán tính thể tích khối chóp, khối hộp. Bài toán khoảng cách này đã được nhiều tác giả nghiên cứu và trình bày nhiều phương pháp giải khác nhau ở những tài liệu khác nhau, tuy nhiên việc hệ thống các phương pháp đó một cách đầy đủ cũng như tìm ra được một số ví dụ để thể hiện được tất cả các phương pháp giải đó vẫn chưa được khai thác. Trong bài viết này, chúng tôi hệ thống hóa các phương pháp giải bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng trong không gian với các hướng tiếp cận khác nhau: sử dụng kĩ thuật rời điểm, sử dụng phương pháp thể tích hai lần, phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ; đồng thời minh họa bằng một ví dụ cụ thể cho tất cả các phương pháp giải trên nhằm trang bị cho học sinh (HS) nhiều góc nhìn khác nhau về các phương pháp để giải bài toán này.

2. Nội dung

Trong không gian, cho điểm A không thuộc mặt phẳng (P), khoảng cách từ A đến mặt phẳng là khoảng cách ngắn nhất từ A đến một điểm bất kì của (P) kí hiệu là $d(A;(P)) = \min AM, \forall M \in (P)$ hay $AH = d\left(A,\left(P\right)\right)$ với $AH \perp (P)$ tại H (Hình 1).

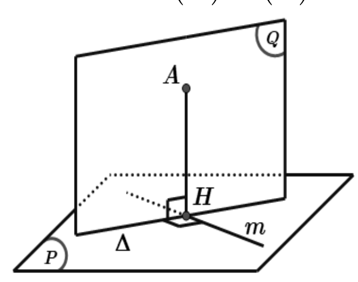


Hình 1

2.1. Hướng tiếp cận 1: Xác định hình chiếu vuông góc của điểm đó lên mặt phẳng

Để tìm khoảng cách $d\left(A,\left(P\right)\right) = AH,$ ta cần xác định được hình chiếu vuông góc H của A lên (P). Ta có tính chất $\begin{cases}(P) \perp (Q)\\(P) \cap (Q) = \Delta\\d \perp \Delta\end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$. Từ đó ta có các bước tìm khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng như sau:

+ *Bước 1:* Xác định mặt phẳng (Q) chứa A và vuông góc với một đường thẳng m nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó $\left(P\right) \perp \left(Q\right)$ (Hình 2).



Hình 2

+ *Bước 2:* Xác định giao tuyến $\Delta = \left(P\right) \cap \left(Q\right)$.

(*) Nghiên cứu sinh, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
(**) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.

Kẻ $AH \perp \Delta$ tại $H\left(H \in \Delta\right)$, khi đó $d\left(A,\left(P\right)\right) = AH.$

+ *Bước 3:* Tính độ dài AH.

Minh họa các bước trên qua ví dụ sau:

Ví dụ 1. Cho hình chóp *S.ABC* có cạnh bên $SA = 3a$ vuông góc với đáy, biết các cạnh của tam giác ABC có độ dài $AB = a$ và $\widehat{ABC} = 60^0$. Tính khoảng cách $d\left(A;\left(SBC\right)\right)$.

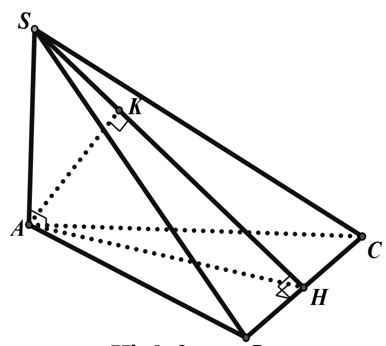
Bước 1: Dựng mặt phẳng vuông góc với (SBC):

Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow BC \perp \left(SAH\right)$. Do đó $\left(SBC\right) \perp \left(SAH\right)$ theo giao tuyến *SH*.

Bước 2: Xác định chân đường vuông góc:

Kẻ $AK \perp SH$ tại $K \Rightarrow AK \perp \left(SBC\right)$ hay $d\left(A;\left(SBC\right)\right) = AK.$

Bước 3: Tính độ dài đoạn AK (Hình 3):



Hình 3

Xét ΔABH có:

$$AH = AB\sin\widehat{ABC} = a\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong ΔSAH có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Vậy $d\left(A;\left(SBC\right)\right) = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Nhận xét: Trong lời giải trên, ta tìm được mặt phẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (*SBC*), sau đó xác định hình chiếu *K* của *A* lên mặt phẳng và tính độ dài đoạn AK. Việc xác định khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng nói chung không phải lúc nào cũng thuận lợi và có sẵn các yếu tố trong quy trình trên để thực hiện được ngay, mà phải dựng hình qua nhiều thao tác mới có thể vận dụng được. Trong một số trường hợp ta chưa vận dụng được ngay quy trình trên ta có thể sử dụng một trong hai kĩ thuật sau để hỗ trợ cho phương pháp trên, gọi chung là "*kĩ thuật rời điểm*".

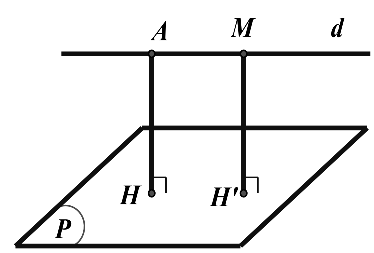
2.2. Hướng tiếp cận 2: Sử dụng kĩ thuật rời điểm

2.2.1. Rời điểm thuộc đường song song với mặt

Ta có

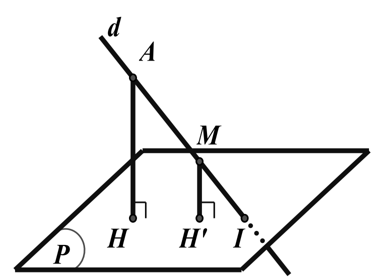
$$A \in d, d \parallel (P) \Rightarrow d\left(A;\left(P\right)\right) = d\left(M;\left(P\right)\right), \forall M \in d.$$

(Hình 4). Trong trường hợp cần tính khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (*P*) gặp khó khăn như xác định mặt phẳng (cụ thể khó khăn ở đây là nằm ở bước 1 trong hướng tiếp cận 1, không phải dễ dàng để chọn được một đường thẳng m để thuận lợi cho việc tạo ra mặt phẳng (*Q*)), ta có thể tìm một đường thẳng *d* chứa *A* và song song với (*P*), khi đó ta chọn điểm M bất kì nào trên đường thẳng *d* mà không quá khó để tìm ra khoảng cách.



Hình 4

2.2.2. Rời điểm thuộc đường cắt mặt (*Định lí Thalès*)



Hình 5

Ta dựng đường thẳng *d* qua A và cắt mặt phẳng (*P*) tại *I*, trên *d* chọn điểm *M*

$\left(M \neq A, M \neq I\right)$ sao cho việc tính khoảng cách $d(M;(P)) = MH'$ là thuận lợi và có thể thực hiện được ngay như phương pháp trình bày, từ cách dựng trên theo *Định lí Thalès* ta có:

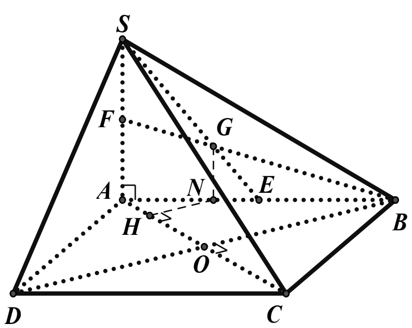
$\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IM}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{MH'}} = k \ (k \neq 0)$ suy ra

$d\left(A,\left(P\right)\right) = \left|k\right|.d\left(M,\left(P\right)\right)$ (Hình 5). Xét ví dụ sau:

Ví dụ 2. [7, tr. 12] Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *SAB*. Tính khoảng cách $d\left(G;\left(SAC\right)\right)$.

***Cách 1**: Rời điểm thuộc đường song song với mặt*

Gọi *O* là tâm hình vuông *ABCD* và *E*, *F* lần lượt là trung điểm *AB* và *SA*, $SE \cap BF = G$ (Hình 6).



Hình 6

Kẻ $GN \perp AB$ tại N khi đó ta có $GN \parallel \left(SAC\right)$ nên $d\left(G;\left(SAC\right)\right) = d\left(N;\left(SAC\right)\right)$.

Dựng $NH \perp AC$ tại *H* thì $NH \perp \left(SAC\right)$, do đó $d\left(N;\left(SAC\right)\right) = NH$. Từ các tam giác đồng dạng ta có:

$$\frac{NH}{OB} = \frac{AN}{AB} = \frac{FG}{FB} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow NH = \frac{1}{3}.OB = \frac{BD}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Vậy $d\left(G;\left(SAC\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

***Cách 2**: Rời điểm thuộc đường cắt mặt*

Nhận thấy đường thẳng $BF \cap (SAC) = F$ khi đó ta có:

$$\frac{d\left(G;\left(SAC\right)\right)}{d\left(B;\left(SAC\right)\right)} = \frac{FG}{FB} = \frac{1}{3}.$$

Mặt khác $OB \perp \left(SAC\right)$ nên ta có:

$$d\left(B;\left(SAC\right)\right) = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow d\left(G;\left(SAC\right)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

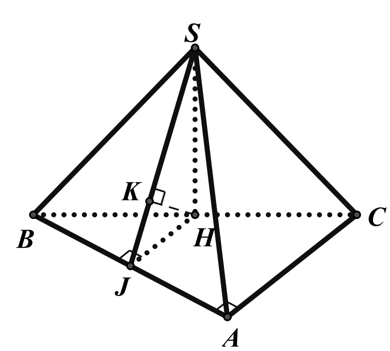
Nhận xét: Ta thấy được điểm mạnh của kĩ thuật rời điểm, nhất là kĩ thuật *rời điểm thuộc đường cắt mặt*, mấu chốt để có lời giải ngắn gọn ở ví dụ này là chỉ ra được *BF* qua *G* và cắt (*SAC*) tại *F* và sử dụng *Định lí Thalès.* Tiếp theo ta xét thêm một ví dụ nữa để tiếp cận cách giải dạng toán này ở nhiều góc độ khác nhau.

Ví dụ 3. [1] (***Câu 5 đề thi tuyển sinh đại học khối A năm* 2013**)

Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *A*, $\widehat{ABC} = 30^0$, *SBC* là tam giác đều cạnh *a* và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$.

Tính thể tích khối chóp S.ABC

Gọi *H* là trung điểm *BC* ta có $SH \perp (ABC)$ hay *SH* là đường cao trong hình chóp *S.ABC,* từ giả thiết $\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Hình 7a).



Hình 7a

Trong ΔABC vuông tại A có:

$$AB = a\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{a}{2}.$$

Do đó ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AB.AC.SH = \frac{a^3}{16}$$

(đơn vị thể tích).

Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Ta có $BC \cap (SAB) = B$, khi đó:

$$\frac{d\left(C;\left(SAB\right)\right)}{d\left(H;\left(SAB\right)\right)} = \frac{CB}{HB} = 2$$

$$\Rightarrow d\left(C;\left(SAB\right)\right) = 2d\left(H;\left(SAB\right)\right).$$

Gọi J là trung điểm AB thì $JH \,//\, AC$ và $JH = \frac{AC}{2} = \frac{a}{4}$. Ta có $AB \perp (SHJ)$ hay $(SAB) \perp (SHJ)$ theo giao tuyến SI. Từ H kẻ $HK \perp SJ$ tại K, khi đó ta có:

$$HK \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H;\left(SAB\right)\right) = HK.$$

Trong ΔSHJ vuông tại H có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{JH^2}$$

$$\Leftrightarrow HK = \frac{SH.JH}{\sqrt{SH^2 + JH^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

Do đó khoảng cách cần xác định là:

$$d\left(C;\left(SAB\right)\right) = 2d\left(H;\left(SAB\right)\right) = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

2.3. Hướng tiếp cận 3: Tính khoảng cách thông qua thể tích - phương pháp "thể tích hai lần"

Trong một số bài toán có yêu cầu ý tính thể tích một khối chóp hoặc việc tính thể tích khối đa diện nào đó, khi đó ta có thể tận dụng ý tính thể tích này để tìm ra khoảng cách từ điểm đó (là một đỉnh của khối chóp) đến mặt phẳng (xem là đáy của khối chóp). Cụ thể ta có $V = \frac{1}{3}Bh$, trong đó B là diện tích mặt đáy, h là chiều cao xuất phát từ đỉnh hình chóp đến mặt đáy. Để tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) ta có thể dựa vào công thức tính thể tích trên: $d(M,(ABC)) = \frac{3V_{M.ABC}}{S_{ABC}}$, tính thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng cách chọn một điểm nào khác là đỉnh mà không quá khó để tìm khoảng cách, tức là $V_{M.ABC} = V_{A.MBC} = V_{B.MAC} = V_{C.MAB}$.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3 đã nêu ở trên, ta nhận thấy:

$$V_{S.ABC} = V_{C.SAB} = \frac{1}{3}.S_{SAB}.d\left(C;\left(SAB\right)\right)$$

$$\Rightarrow d\left(C;\left(SAB\right)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAB}},$$

trong đó ta xem C là đỉnh, đáy là ΔSAB. Từ lời giải trên ta có hướng tiếp cận nữa cho bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng như sau:

Ta có $(SAB) \perp (SHJ)$ suy ra (SHJ) là mặt phẳng trung trực của (SAB) nên ΔSAB là tam giác cân tại S nhận SJ là đường cao.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.SJ.AB = \frac{1}{2}\sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}.AB = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

(*đơn vị diện tích*).

Khoảng cách cần tìm:

$$d\left(C;\left(SAB\right)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

2.4. Hướng tiếp cận 4: Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Phần tiếp theo bài viết, ta sẽ tiếp cận bài toán tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng thông qua phương pháp tọa độ trong không gian *Oxyz,* để sử dụng được phương pháp này ta thực hiện các thao tác như sau:

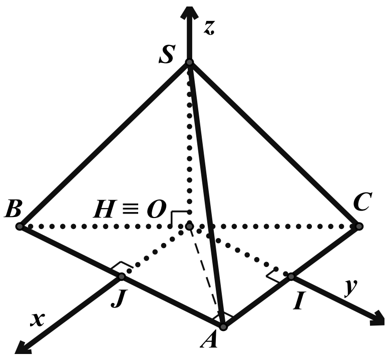
- Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp.

- Chuyển đổi các yêu cầu của bài toán từ ngôn ngữ hình học thuần túy sang ngôn ngữ tọa độ.

- Viết phương trình mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ và xác định tọa độ $A\left(x_A; y_A; z_A\right) \notin (P)$ của bài toán.

- Sử dụng công thức tính khoảng cách $d\left(A;(P)\right) = \dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Trở lại Ví dụ 3:



Hình 7b

Gọi I là trung điểm AC, khi đó $HI \perp AC$. Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz* như Hình 7b, khi đó ta có:

$$H \equiv O\left(0;0;0\right);$$

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right);\ A\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right);$$

$$B\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right);\ C\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BS}\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\overrightarrow{BA}\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right).$$

Dễ thấy (SAB) đi qua điểm S và nhận $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BA}\right] = \left(-\dfrac{3a^2}{4};0;-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$-\frac{3a^2}{4}x - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\left(z - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x + 2\sqrt{3}z - 3a = 0.$$

Khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (SAB) là:

$$d\left(C;(SAB)\right) = \frac{\left|12\left(-\frac{a}{4}\right) + 2\sqrt{3}.0 - 3a\right|}{\sqrt{12^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

2.5. Hướng tiếp cận 5: Sử dụng phương pháp vectơ

Xét bài toán tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) tức là tính $d(M,(ABC)) = MH,$ ta có:

$$\begin{cases} MH \perp (ABC) \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases}.$$

Chuyển sang ngôn ngữ vectơ ta được:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} \end{cases}.$$

Do đó giải bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng bằng phương pháp vectơ như sau:

- Chọn hệ vectơ $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ gồm ba vectơ không đồng phẳng. Tìm tích vô hướng giữa các cặp vectơ trong hệ.

- Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MH}$ qua hệ $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$.

- Tính độ dài $MH = \sqrt{\overrightarrow{MH}^2}$.

Sau đây chúng tôi xét ví dụ sau bằng các cách tiếp cận đã trình bày trên:

Ví dụ 4. [1] (***Câu 6 đề thi tuyển sinh đại học khối B năm 2014***)

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh *a*. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh

AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng $60°$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$.

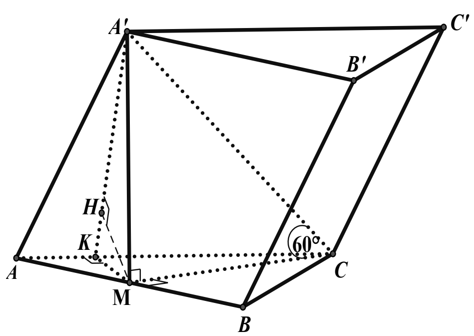
Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Gọi M là trung điểm AB thì $A'M \perp \left(ABC\right)$ hay $A'M$ là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Hình chiếu của $A'C$ trên $\left(ABC\right)$ là đoạn MC nên góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy là góc $\widehat{A'CM} = 60°$. (Hình 8a) Trong $\Delta A'MC$ vuông có:

$$A'M = MC\tan\widehat{A'CM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\tan 60° = \frac{3a}{2}.$$

Từ đó ta có:

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'M.S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$



Hình 8a

Tính khoảng cách từ B đến $\left(ACC'A'\right)$

***Cách 1**: Rời điểm thuộc đường cắt mặt*

Nhận thấy $AB \cap (ACC'A') = A$ khi đó ta có:

$$\frac{d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right)}{d\left(M;\left(ACC'A'\right)\right)} = \frac{BA}{MA} = 2$$

$$\Rightarrow d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right) = 2d\left(M;\left(ACC'A'\right)\right).$$

Kẻ $MK \perp AC$ tại K, khi đó $AC \perp A'M$. Suy ra $\left(A'MK\right) \perp AC$ nên $\left(A'MK\right) \perp \left(ACC'A'\right)$ theo giao tuyến $A'K$.

Từ M kẻ $MH \perp A'K$ tại H suy ra $MH \perp \left(ACC'A'\right)$ nên $d\left(M;\left(ACC'A'\right)\right) = MH.$

Trong ΔAMC vuông tại M có:

$$KM.AC = MA.MC$$

$$\Leftrightarrow KM = \frac{MA.MC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Xét $\Delta A'MK$ vuông tại M ta có:

$$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{KM^2} + \frac{1}{A'M^2}$$

$$\Leftrightarrow HM = \frac{KM.A'M}{\sqrt{KM^2 + A'M^2}} = \frac{3a\sqrt{13}}{26}.$$

Do đó khoảng cách cần tìm là:

$$d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right) = 2d\left(M;\left(ACC'A'\right)\right) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

***Cách 2**: Sử dụng phương pháp thể tích hai lần*

Ta có $V_{\text{khèi chop}} = \frac{1}{3}.V_{\text{l¨ng trô}}$. Do $\left(A'MK\right) \perp \left(ACC'A'\right)$ nên $A'K \perp AC$ suy ra:

$$S_{\Delta A'AC} = \frac{1}{2}A'K.AC$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{A'M^2 + KM^2}.AC$$
$$= \frac{a^2\sqrt{39}}{8}.$$

Mặt khác:

$$V_{A'.ABC} = V_{B.A'AC} = \frac{1}{3}d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right).S_{\Delta A'AC}$$

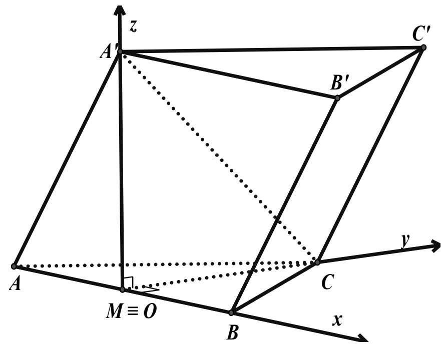
$$\Rightarrow d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right) = \frac{3V_{B.A'AC}}{S_{\Delta A'AC}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

***Cách 3**: Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian*

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như Hình 8b. Ta có:

$$M \equiv O\left(0;0;0\right); A'\left(0;0;\frac{3a}{2}\right);$$

$$A\left(\frac{-a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right).$$



Hình 8b

Dễ thấy mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ đi qua điểm A và nhận

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(-\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$-\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\left(x + \frac{a}{2}\right) + \frac{3a^2}{4}y + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}z = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2\sqrt{3}y + 2z - 3a = 0.$$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ là:

$$d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right) = \frac{\left|-6\left(\frac{-a}{2}\right) + 2\sqrt{3}.0 + 2.0 - 3a\right|}{\sqrt{\left(-6\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Cách 4: Sử dụng phương pháp vectơ

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B lên $\left(ACC'A'\right)$. Chọn hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'M}\right\}$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A'M} = \vec{c}$. Ta có:

$$\vec{a}\vec{b} = a^2 cos 60^0 = \frac{a^2}{2}, \vec{c}\vec{a} = \vec{b}\vec{c} = 0 \text{ (do } A'M \perp (ABC))$$

và $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = a, \left|\vec{c}\right| = \dfrac{3a}{2}$ (*).

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AA'} + l\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'}) + l\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \left(\frac{k}{2} - 1\right)\vec{a} + l\vec{b} - k\vec{c}.$$

Do $BH \perp \left(ACC'A'\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AA'} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\left(\frac{k}{2} - 1\right)\vec{a} + l\vec{b} - k\vec{c}\right].\vec{b} = 0 \\ \left[\left(\frac{k}{2} - 1\right)\vec{a} + l\vec{b} - k\vec{c}\right].\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = 0 \end{cases}.$$

Sử dụng (*) từ đó ta được hệ

$$\begin{cases} k + 4l = 2 \\ 10k + l = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{13} \\ l = \frac{6}{13} \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{BH} = -\dfrac{2}{13}\left(6\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}\right) \Rightarrow BH = \sqrt{\overrightarrow{BH}^2} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}.$

Nhận xét: Qua các ví dụ minh họa trên cho ta thấy bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng được nhìn nhận với nhiều hướng tiếp cận khác nhau: vận dụng quy trình đã biết với sự hỗ trợ của kĩ thuật rời điểm, tính khoảng cách thông qua thể tích và sử dụng phương pháp vectơ, tọa độ trong không gian. Mỗi hướng tiếp cận đều có những ưu điểm riêng, vì vậy trong từng bài toán cụ thể các HS có thể lựa chọn hướng tiếp cận phù hợp để giải quyết bài toán này một cách hiệu quả hơn.

3. Kết luận

Bài viết đã hệ thống hóa một số phương pháp tìm khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng bằng nhiều hướng tiếp cận khác nhau, qua từng ví dụ các phương pháp cũng đã làm sáng rõ được ưu điểm của nó. Hi vọng với nhiều góc độ được xem xét trên dạng toán này sẽ giúp HS có thể chọn ra cách giải phù hợp với trình độ, năng lực của mình. Chú ý rằng muốn phát triển tư duy hình học ở HS một cách hiệu quả thì việc giải một bài toán hình học không gian bằng phương pháp thuần túy nên được ưu tiên trên hết, các hướng tiếp cận khác như phương pháp tọa độ, vectơ chủ yếu trên các thao tác phân tích, ta xem như là một công cụ để hỗ trợ, kiểm tra lại kết quả bài toán./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng các năm 2010 - 2015.*

[2]. Văn Như Cương, Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2013), *Sách Bài tập Hình học 11 Nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[3]. Văn Như Cương, Phạm Khắc Ban, Lê Huy Hùng, Tạ Mân (2013), *Sách Bài tập Hình học 12 Nâng Cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[4]. Nguyễn Văn Lộc (2008), *Phương pháp vectơ trong giải toán hình học không gian*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[5]. Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2013), *Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[6]. Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Phạm Khắc Ban, Hạ Vũ Anh, Vũ Đình Hòa (2013), *Tài liệu chuyên toán Hình học 11*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[7]. *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* số *372*, tháng 6/2008, NXB Giáo dục Việt Nam.

ON THE PROBLEM OF CALCULATING THE DISTANCE FROM A POINT TO A PLANE IN SPACE GEOMETRY

Summary

In this article, we systematize different problem-solving approaches to calculating distances from one point to a space plane: point-deduction technique, twice-volume method, vector method and coordinate one, together with specific examples provided for each case to offer students with different perspectives on methods to solve this type of math problems.

Keywords: Distance from one point to a plane, problem solving methods, space geometry.

Ngày nhận bài: 18/4/2017; Ngày nhận lại: 07/6/2017; Ngày duyệt đăng: 31/7/2017.