KHẢO SÁT TÍNH UGN CỦA ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT TRÊN CÁC ĐỒ THỊ LŨY THỪA

• Nguyễn Hữu Tính(*), Ngô Tấn Phúc(**)

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi khảo sát đồ thị lũy thừa của nhóm cộng các số nguyên modulo. Tiếp theo, dựa vào các kết quả gần đây của đại số đường đi Leavitt mà chủ yếu là dựa vào công trình [1], chúng tôi xét tính UGN của đại số đường đi Leavitt đối với lớp đồ thị nói trên.

Từ khóa: Đại số đường đi Leavitt, đồ thị lũy thừa, tính chất UGN.

1. Mở đầu

Một vành R được gọi là thỏa mãn điều kiện UGN nếu có một đơn ánh từ R^m đến R^n thì $m \le n$. Điều này tương tự như việc trong một không gian vectơ n chiều, mọi hệ có $m > n$ vectơ đều phụ thuộc tuyến tính. Khái niệm này đã được đề xuất bởi W. Leavitt trong [7] và đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết vành hay lí thuyết môđun nói chung. Một số kết quả gần đây về tính UGN có thể tham khảo tại [4], [6].

Cho một đồ thị (trực tiếp) E và một trường số K, Abrams và Aranda Pino trong [2] và (một cách độc lập) Ara, Moreno, Pardo trong [3] đã giới thiệu lớp *đại số đường đi Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E. Lớp đại số này là mở rộng của đại số Leavitt $L_K(1,n)$ trong [7]. Trong [1], Abrams, Nam và Phuc đã chỉ ra các điều kiện về đồ thị E để $L_K(E)$ và $C_K(E)$ thỏa mãn tính UGN.

Trong khi đó, các lớp đồ thị sinh ra từ lí thuyết nhóm gần đây nhận được sự quan tâm của các nhà khoa học trong lĩnh vực này. Chẳng hạn, trong [5] Kelarev đã đề xuất nghiên cứu lớp đồ thị lũy thừa của các nửa nhóm và nhóm.

Nội dung chính của bài viết này là tổng hợp các kết quả gần đây về điều kiện cho lớp các đồ thị hữu hạn E sao cho đại số đường đi Leavitt của chúng thỏa mãn tính UGN. Sau đó chúng tôi áp dụng vào lớp đồ thị lũy thừa của nhóm cộng các số nguyên modulo.

2. Nội dung chính

Trong bài viết này, tất cả cả các vành đều khác không và có đơn vị. Tất cả các môđun đều là môđun unita. Trước tiên chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về đồ thị trực tiếp và đại số đường đi Leavitt.

Một đồ thị $E=(E^0,E^1,s,r)$ là một bộ bao gồm hai tập hợp E^0 và E^1 và hai ánh xạ $r,s:E^0\to E^1$. Các phần tử của E^0 được gọi là các *đỉnh* và các phần tử của E^1 được gọi là các *cạnh*. Đối với mỗi cạnh e trong E^1, $s(e)$ được gọi là *điểm đầu* của e và $r(e)$ được gọi là *điểm cuối* của *e*. Đồ thị E được gọi là *hữu hạn* nếu các tập E^0 và E^1 là các tập hữu hạn phần tử. Một *đường đi* trong một đồ thị E là chuỗi các cạnh $p=e_1e_2...e_n$ sao cho $r(e_i)=s(e_{i+1})$ với mọi $i=1,2,...,n-1$. Một đường đi được gọi là một *chu trình* nếu $s(p)=r(p)$ và $s(e_i)\neq s(e_j)$ đối với mọi $i\neq j$. Nói cách khác, một chu trình là một đường đi mà bắt đầu và kết thúc trên cùng một đỉnh và không đi qua bất kì đỉnh nào quá một lần. Kí hiệu p^0 là tập tất cả các đỉnh trong p.

Trong đồ thị E, một đỉnh v được gọi là *ngọn* nếu như $s^{-1}(v)=\varnothing$ và v được gọi là *gốc* nếu như $r^{-1}(v)=\varnothing$, nếu v không phải là *ngọn* thì được gọi là *đỉnh chính quy*.

Cho một đồ thị trực tiếp $E=(E^0,E^1,s,r)$ và một trường bất kì K, *đại số đường đi Leavitt* $L_K(E)$ của đồ thị E với hệ tử trên K là một K- đại số sinh bởi tập E^0 và E^1, cùng với tập cạnh ảo $\{e^*\mid e\in E^1\}$, thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $v,w\in E^0$ và $e,f\in E^1$:

(1) $vw=\delta_{v,w}w;$

(2) $s(e)e=e=er(e)$ và $r(e)e^*=e^*=e^*s(e);$

(3) $e^*f=\delta_{e,f}r(e);$

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.

(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

(4) $v=\sum_{e\in s^{-1}(v)} ee^*$ với mọi đỉnh chính quy v.

Trong [1] các tác giả đã chỉ ra các điều kiện sau đây (Định lí 1 và Định lí 2) về điều kiện của đồ thị E để $L_K(E)$ thỏa mãn tính UGN.

Định lí 1. [1, Theorem 3.9] *Cho $E=(E^0,E^1,r,s)$ là một đồ thị hữu hạn và không có gốc, K là một trường. Khi đó $L_K(E)$ thỏa điều kiện UGN nếu và chỉ nếu E chứa một chu trình c sao cho $|r^{-1}(v)|=1$ với mọi $v\in c^0$.*

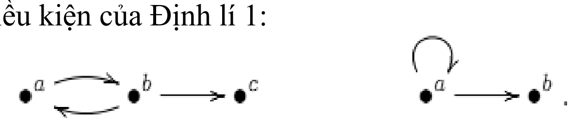
Cho $E=(E^0,E^1,r,s)$ là một đồ thị và $v\in E^0$ là một gốc. Ta gọi *đồ thị thu gọn gốc* $E_{\setminus v}$ của E là đồ thị được xác định như sau: $(E_{\setminus v})^0=E^0\setminus\{v\}$, $(E_{\setminus v})^1=E^1\setminus s^{-1}(v)$, $s_{E_{\setminus v}}=s|_{(E_{\setminus v})^1}$ và $r_{E_{\setminus v}}=r|_{(E_{\setminus v})^1}$. Nói cách khác, $E_{\setminus v}$ là đồ thị có được từ E bằng cách bỏ đi v và các cạnh trong E có điểm đầu là v.

Định lí 2. [1, Theorem 3.16] *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường. Đặt*

$$E=E_0\to E_1\to\cdots\to E_i\to\cdots\to E_t=E_{sf}$$

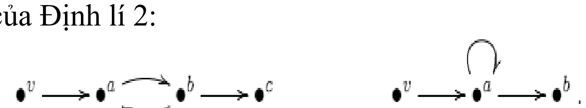
là một dãy các đồ thị thu gọn gốc trong đó E_{sf} là đồ thị không có gốc. Khi đó $L_K(E)$ thỏa điều kiện UGN khi và chỉ khi $\exists 0\le j\le t$ để E_j chứa một điểm cô lập, hoặc E_{sf} chứa một chu trình c với $|r^{-1}(v)|=1$ với mọi $v\in c^0$.

Ví dụ 1. Một số đồ thị sau đây thỏa mãn điều kiện của Định lí 1:



Hình 1. Các đồ thị thỏa mãn Định lí 1

Ví dụ 2. Các đồ thị sau đây không thỏa mãn điều kiện của Định lí 1 nhưng thỏa mãn điều kiện của Định lí 2:



Hình 2. Các đồ thị thỏa mãn Định lí 2

Tiếp theo, chúng tôi áp dụng các kết quả trên đây vào lớp đồ thị lũy thừa của nhóm cộng các số nguyên modulo.

Định nghĩa 2. [5, p. 1] Cho S là một nhóm. Ta gọi *đồ thị lũy thừa của nhóm* S, kí hiệu là $P(S)$, là đồ thị xác định như sau: Tập đỉnh là tập các phần tử trong S và ta nói có một cạnh đi từ u đến v $(u,v\in S)$ nếu $u\neq v$ và v là một lũy thừa của u.

Trong bài viết này, ta kí hiệu $\mathbb{Z}_n$ là tập các số nguyên modulo n. Hiển nhiên $\mathbb{Z}_n$ là một nhóm cộng và ta viết $P(\mathbb{Z}_n)=:\Gamma_n$.

Nhận xét 1. *Trong đồ thị Γ_n,*

(i) có một cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar b$ khi và chỉ khi $a\neq b$ và $\exists k\in\mathbb{N}^*: ka\equiv b \pmod n$;

(ii) nếu $i\mid j$ thì tồn tại một cạnh đi từ $\bar i$ đến $\bar j$;

(iii) nếu tồn tại các cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar b$ và từ $\bar b$ đến $\bar c$ thì tồn tại một cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar c$.

Bổ đề 1. *Trong đồ thị Γ_n, nếu $(a,n)=i$ thì tồn tại các cạnh đi từ $\bar i$ đến $\bar a$ và từ $\bar a$ đến $\bar i$.*

Chứng minh. Từ Nhận xét 1 suy ra tồn tại cạnh đi từ $\bar i$ đến $\bar a$. Từ giả thiết suy ra $\exists r,s\in\mathbb{Z}$ để $ra+sn=i$. Suy ra $ra\equiv i \pmod n$ nên tồn tại một cạnh đi $\bar a$ đến $\bar i$. □

Bổ đề 2. *Trong đồ thị Γ_n, nếu $(a,n)=i$, $(b,n)=j$ và $i\mid j$ thì sẽ tồn tại một cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar b$.*

Chứng minh. Theo giả thiết và Bổ đề 1 tồn tại các cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar i$ và từ $\bar j$ đến $\bar b$. Theo Nhận xét 1 (ii), tồn tại một cạnh đi từ $\bar i$ đến $\bar j$. Do đó sẽ tồn tại tại một cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar b$. □

Định lí 3. *Giả sử $(a,n)=i$ và $(b,n)=j$. Khi đó trên Γ_n, có một cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar b$ khi và chỉ khi $i\mid j$.*

Chứng minh.

$(\Leftarrow)$ Nếu $i\mid j$ thì theo Bổ đề 2, tồn tại một cạnh đi từ $\bar a$ đến $\bar b$ trong Γ_n.

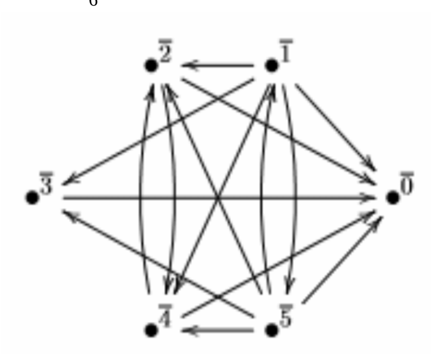
$(\Rightarrow)$ Nếu $(a,n)=i$ thì theo Bổ đề 1, tồn tại một cạnh đi từ $\bar i$ đến $\bar a$. Theo Nhận xét 1 (ii), tồn tại một cạnh đi từ $\bar{i}$ đến $\bar{j}$. Từ giả thiết $(b,n)=j$ và Bổ đề (1), tồn tại một cạnh đi từ $\bar{j}$ đến $\bar{b}$. Do đó $\exists k\in\mathbb{N}^*: ki\equiv j\ (\mathrm{mod}\, n)$. Suy ra $ki=j+nt\,(t\in\mathbb{Z})$ nên $i\mid j+nt$. Mà $i\mid n$ nên $i\mid j$. □

Nhận xét 2. *Trên Γ_n, với mỗi $0\le i<n$ ta đặt $C(i)=\{\bar{a}\in\mathbb{Z}_n:(a,n)=i\}$. Khi đó:*

(i) $\forall \bar{a},\bar{b}\in C(i)$ luôn có cạnh đi từ $\bar{a}$ đến $\bar{b}$ và ngược lại.

(ii) $\forall \bar{a}\in C(i)$, $\forall \bar{b}\in C(j)$. Khi đó có cạnh đi từ $\bar{a}$ đến $\bar{b}$ khi và chỉ khi $i\mid j$.

Ví dụ 5. Trong Γ_6 thì $C(0)=\{\bar{0}\}$, $C(1)=\{\bar{1},\bar{5}\}, C(2)=\{\bar{2},\bar{4}\}, C(3)=\{\bar{3}\}$, ta được hình vẽ của Γ_6 là:



Hình 3. Đồ thị Γ_6

Nhận xét 3.

(i) Trong Γ_n, ta có $|C(1)|=\varphi(n)$, trong đó $\varphi(n)$ là giá trị của hàm số Euler tại số nguyên dương n.

(ii) Nếu $n>2$ thì trong Γ_n không có cạnh nối từ các đỉnh trong $C(i), i>1$ đến các đỉnh trong $C(1)$.

Áp dụng Định lí 1, ta thu được một tiêu chuẩn sau đây để kiểm tra tính UGN của đại số đường đi Leavitt của các đồ thị lũy thừa.

Định lí 4. *Đại số đường đi Leavitt của $\Gamma_n\ (n\in\mathbb{N})$ thoả mãn tính chất UGN khi và chỉ khi $\varphi(n)\le 2$.*

Chứng minh.

$(\Rightarrow)$ Nếu $\varphi(n)=k\ge 3$ thì ta có thể đánh số các đỉnh trong Γ_n là:

$$\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_n\},$$

trong đó $C(1)=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$. Theo Định lí 3 thì

$$\left|r^{-1}(a_i)\right|=k-1\ge 2 \text{ với mọi } i=1,2,\dots,k$$

và

$$\left|r^{-1}(a_j)\right|\ge k\ge 3 \text{ với mọi } j=k+1,k+2,\dots,n.$$

Như vậy $\left|r^{-1}(a_i)\right|\ge 2$ với mọi đỉnh a_i trong Γ_n. Theo Định lí 1, $L_K(\Gamma_n)$ không thoả mãn tính chất UGN.

$(\Leftarrow)$ Nếu $\varphi(n)=k\le 2$ thì ta có thể đánh số các đỉnh trong Γ_n là:

$$\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_n\},$$

trong đó $C(1)=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$. Theo Nhận xét 3, (ii) thì $\left|r^{-1}(a_i)\right|=k-1\le 1$ với $i=1,2$.

Theo Định lí 1, $L_K(\Gamma_n)$ thoả mãn tính chất UGN. □

Từ Định lí 4 và Nhận xét 3, ta có thể kiểm tra được tính UGN của đại số đường đi Leavitt của các đồ thị Γ_n như sau:

Hệ quả 1. *$L_K(\Gamma_n)$ thỏa mãn tính UGN khi và chỉ khi $n=1,2,3,4,6$.*

3. Kết luận

Bài viết đã giới thiệu được tiêu chuẩn của lớp đồ thị E để đại số đường đi Leavitt của chúng thỏa mãn tính UGN và áp dụng vào lớp đồ thị lũy thừa của nhóm cộng các số nguyên modulo. Nhờ vào hàm số Euler, bài viết đã xác định được các nhóm cộng các số nguyên modulo thỏa mãn điều kiện nói trên./.

Tài liệu tham khảo

[1]. G. Abrams, T. G. Nam and N. T. Phuc (2017), "Leavitt path algebras having unbounded generating number", *J. Pure and Applied Algebra*, (221), p. 1322-1343.

[2]. G. Abrams and G. Aranda Pino (2005), “The Leavitt path algebra of a graph”, *J. Algebra,* (293), p. 319-334.

[3]. P. Ara, A. Moreno and E. Pardo (2007), “NonstableK-theory for graph algebras”, *Algebra Represent Theory,* (10), p. 157-178.

[4]. A. Haghany and K. Varadarajan (2002), “IBN and related properties for rings”, *Acta Math. Hungar,* (94), p. 251 - 261.

[5]. A. V. Kelarev (2002), “Directed graphs and combinatiorial properties of semigroups”, *Journal of Algebra*, (51), p. 16-26.

[6]. T. Y. Lam (1999), *Lectures on modules và rings,* Springer - Verlag, New York - Berlin.

[7]. W. G. Leavitt (1962), “The module type of a ring”, *Trans. Amer. Math. Soc,* (42), p. 113-130.

INVESTIGATING THE UGN PROPERTY OF THE LEAVITT PATH ALGEBRA ON THE POWER GRAPH

Summary

In this paper, we investigate the power graph of the integers modulo group. Next, basing on the current results of the Leavitt path algebras, mainly on [1], we analyze the UGN property of the Leavitt path algebras on these graphs.

Keywords: Leavitt path algebra, Power graph, UGN property.

Ngày nhận bài: 24/3/2017; Ngày nhận lại: 04/5/2017; Ngày duyệt đăng: 21/8/2017.