SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP HỖN HỢP CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ÁNH XẠ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN $(\phi\text{-}E_\mu)$ TRONG KHÔNG GIAN BANACH TRƠN ĐỀU VÀ LỒI ĐỀU

• Trương Cẩm Tiên(*), Nguyễn Trung Hiếu(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn, đề xuất một dãy lặp hỗn hợp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$, đồng thời thiết lập sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Các kết quả này là sự mở rộng các kết quả chính trong [2] từ không gian Hilbert sang không gian Banach trơn đều và lồi đều. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: dãy lặp hỗn hợp, bài toán cân bằng, ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$, không gian Banach trơn đều và lồi đều.

1. Giới thiệu

Một số vấn đề trong toán học và những ngành khoa học kĩ thuật khác dẫn đến việc giải bài toán (EP) sau: *"Tìm điểm $p \in C$ sao cho $f(p,y) \geq 0$ với mọi $y \in C$, trong đó C là tập lồi đóng và $f: C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$"*. Bài toán (EP) được gọi là bài toán cân bằng và được giới thiệu bởi Blum và Oettli [3]. Bài toán (EP) được xem như là bài toán bất đẳng thức Ky Fan và là tổng quát của nhiều mô hình toán học khác như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động. Kĩ thuật cốt yếu để giải bài toán (EP) là xây dựng dãy lặp và khảo sát sự hội của dãy lặp này đến nghiệm của bài toán hoặc hội tụ đến hình chiếu của điểm xuất phát lên tập nghiệm của bài toán.

Cùng với việc tìm nghiệm của bài toán cân bằng, vấn đề tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động của các ánh xạ phi tuyến cũng được nhiều tác giả quan tâm. Trong hướng nghiên cứu này, một số tác giả đã giới thiệu những mở rộng của ánh xạ không giãn và xây dựng những dãy lặp để tìm nghiệm chung của bài toán điểm cân bằng và bài toán điểm bất động của những ánh xạ đó. Năm 2009, Takahashi và Zembayashi [10] đã giới thiệu dãy lặp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ tương đối không giãn trong không gian Banach trơn đều và lồi đều; Qin và cộng sự [8] đã đề xuất một dãy lặp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của hai ánh xạ tựa ϕ- không giãn trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Năm 2016, Alizadeh và Moradlou [2] đã đề xuất một dãy hỗn hợp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ hỗn hợp tổng quát trong không gian Hilbert.

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn, đề xuất một dãy lặp hỗn hợp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$, đồng thời thiết lập sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo. Lưu ý rằng trong bài báo này, chúng tôi xét E là không gian Banach thực.

Định nghĩa 1.1 ([1])**.** Cho E là không gian Banach. Khi đó,

(1) Không gian E được gọi là *lồi chặt* nếu $S = \{x \in E : ||x|| = 1\}$ là lồi chặt, nghĩa là $||x+y|| < 2$ với mọi $x, y \in S$ mà $x \neq y$.

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

(2) Không gian E được gọi là *lồi đều* nếu với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $||x + y|| < 2(1 - \delta)$ với mọi $x, y \in E$, $||x|| \le 1$, $||y|| \le 1$ và $||x - y|| = \varepsilon$.

(3) Không gian E được gọi là *trơn* nếu tồn tại

$$\lim_{t \to 0} \frac{||x + ty|| - ||x||}{t} \text{ với mọi } x, y \in S. \quad (1.1)$$

(4) Không gian E được gọi là *trơn đều* nếu giới hạn (1.1) là giới hạn đều với $x, y \in S$.

Từ định nghĩa trên, chúng ta thấy rằng nếu E là không gian Banach lồi đều thì E là không gian Banach lồi chặt và phản xạ; nếu E là không gian Banach trơn đều thì E là không gian Banach trơn và phản xạ.

Cho E là không gian Banach với chuẩn $||.||$ và E^* không gian liên hợp của E. Kí hiệu $\langle x, f \rangle$ là giá trị của ánh xạ tuyến tính $f \in E^*$ tại $x \in E$. Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to 2^{E^*}$ được định nghĩa bởi

$$Jx = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = ||x||^2 = ||f||^2\} \text{ với mọi } x \in E.$$

Bổ đề 1.2 ([1]). *Cho E là không gian Banach. Khi đó,*

(1) Nếu E là không gian Banach trơn thì J là ánh xạ đơn trị, liên tục yếu* theo chuẩn và $||Ju|| = ||u||$ với mọi $u \in E$.

(2) Nếu E là không gian Banach lồi chặt, phản xạ thì J^{-1} là ánh xạ liên tục yếu* theo chuẩn.

(3) Nếu E là không gian Banach trơn, lồi chặt, phản xạ thì J là song ánh và $||J^{-1}u|| = ||u||$ với mọi $u \in E^*$.

(4) Nếu E là không gian Banach trơn đều thì J là ánh xạ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của E.

(5) Không gian Banach E là trơn đều nếu và chỉ nếu E^* là không gian Banach lồi đều.

(6) Nếu E là không gian Hilbert thì J là ánh xạ đồng nhất.

Giả sử rằng C là một tập con khác rỗng của không gian Banach trơn E. Xét phiếm hàm Lyapunov $\phi : E \times E \to [0, \infty)$ được định nghĩa bởi

$$\phi(x, y) = ||x||^2 - 2\langle x, Jy \rangle + ||y||^2 \text{ với mọi } x, y \in E. \quad (1.2)$$

Nhận xét 1.3 ([1]). *Từ định nghĩa của hàm số ϕ, ta được*

(1) Nếu E là không gian Hilbert thì (1.2) *trở thành $\phi(x, y) = ||x - y||^2$ với mọi $x, y \in E$.*

(2) Với mọi $x, y \in E$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$(||x|| - ||y||)^2 \le \phi(x, y) \le (||x|| + ||y||)^2, \quad (1.3)$$

và $\phi(x, J^{-1}(\lambda Jy + (1-\lambda)Jz)) \le \lambda\phi(x, y) + (1-\lambda)\phi(x, z)$. (1.4)

(3) Cho E là không gian Banach trơn, lồi chặt và phản xạ. Khi đó, $\phi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$ với mọi $x, y \in E$.

Bổ đề 1.4 ([7], Proposition 2). *Cho E là không gian Banach lồi đều, trơn và hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong E. Khi đó, nếu $\lim_{n\to\infty}\phi(x_n, y_n) = 0$ và $\{x_n\}$ hoặc $\{y_n\}$ bị chặn thì $\lim_{n\to\infty}||x_n - y_n|| = 0$.*

Bổ đề 1.5 ([4], Remark 2.2). *Cho E là không gian Banach lồi đều, trơn và hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong E sao cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ bị chặn. Khi đó,*

$$\lim_{n\to\infty}\phi(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}||x_n - y_n|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}||Jx_n - Jy_n|| = 0.$$

Năm 1996, Alber [1] đã giới thiệu một mở rộng của khái niệm phép chiếu P_C trong không gian Hilbert và được gọi là phép chiếu suy rộng $\prod_C$ trong không gian Banach.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số tính chất của phép chiếu suy rộng trong không gian Banach.

Bổ đề 1.6 ([7], Proposition 3). *Cho E là không gian Banach, lồi chặt, trơn và phản xạ, C là tập con khác rỗng, lồi và đóng trong E và $x \in E$. Khi đó, tồn tại duy nhất $x_0 \in C$ sao cho $\phi(x_0, x) = \inf\{\phi(z, x) : z \in C\}$. Ánh xạ $\prod_C : E \to C$ được định nghĩa bởi $\prod_C x = x_0$ là một phép chiếu từ E lên C.*

Bổ đề 1.7 ([7], Proposition 4, Proposition 5). *Cho E là không gian Banach lồi chặt, trơn và phản xạ, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong E, $x \in E$. Khi đó,* *(1)* $x_0 = \prod_C x$ *khi và chỉ khi* $\langle x_0 - y, Jx - Jx_0\rangle \geq 0$ *với mọi* $y \in C$.

(2) $\phi(y, \prod_C x) + \phi(\prod_C x, x) \leq \phi(y, x)$ *với mọi* $y \in C$.

Bổ đề sau đưa ra một bất đẳng thức quan trọng trong không gian Banach lồi đều.

Bổ đề 1.8 ([11], Theorem 2). *Cho* E *là không gian Banach, lồi đều và* $r > 0$. *Khi đó, tồn tại* $g : [0, 2r] \to [0, \infty)$ *là hàm số liên tục, tăng chặt và lồi sao cho* $g(0) = 0$ *và*

$$||\lambda x + (1-\lambda)y||^2 \leq \lambda||x||^2 + (1-\lambda)||y||^2 - \lambda(1-\lambda)g(||x-y||)$$

với mọi $\lambda \in [0,1]$ *và* $x, y \in B = \{z \in E : ||z|| \leq r\}$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một mở rộng của ánh xạ không giãn là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).

Định nghĩa 1.9 ([5], Definition 2). Cho E là không gian Banach, C là tập con khác rỗng trong E và ánh xạ $T : C \to C$. Khi đó, T được gọi là ánh xạ *thỏa mãn điều kiện* (E_μ) nếu tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho $||x - Ty|| \leq \mu || x - Tx || + || x - y ||$ với mọi $x, y \in C$.

Kí hiệu $F(T)$ là tập hợp điểm bất động của T nghĩa là $F(T) = \{p \in C : Tp = p\}$. Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số ánh xạ phi tuyến trong không gian Banach trơn.

Định nghĩa 1.10 ([9]). Cho E là không gian Banach, trơn, C là tập con khác rỗng trong không gian Banach E và ánh xạ $T : C \to C$. Khi đó

(1) T được gọi là ánh xạ ϕ- *không giãn* nếu $\phi(Tx, Ty) \leq \phi(x, y)$ với mọi $x, y \in C$.

(2) T được gọi là ánh xạ *tựa* ϕ- *không giãn* nếu $\phi(p, Ty) \leq \phi(p, y)$ với mọi $y \in C$ và $p \in F(T)$.

Bổ đề 1.11 ([8], Lemma 2.4). *Cho* E *là không gian Banach lồi chặt, trơn, phản xạ,* C *là tập con lồi đóng khác rỗng trong* E *và* $T : C \to C$ *là ánh xạ tựa* ϕ- *không giãn. Khi đó,* $F(T)$ *là tập con lồi đóng trong* C.

Bây giờ, kí hiệu $EP(f) = \{p \in C : f(p, y) \geq 0$ với mọi $y \in C\}$ là tập nghiệm của bài toán (EP). Để giải bài toán (EP), các tác giả đã xét những giả thiết sau cho song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$.

(A1) $f(u, u) = 0$ với mọi $u \in C$.

(A2) f đơn điệu, nghĩa là $f(u, v) + f(v, u) \leq 0$ với mọi $u, v \in C$.

(A3) $\limsup_{t \downarrow 0} f(tw + (1-t)u, v) \leq f(u, v)$ với mọi $u, v, w \in C$.

(A4) Với mỗi $u \in C, v \mapsto f(u, v)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới.

Bổ đề 1.12. *Cho* E *là không gian Banach lồi chặt, trơn đều,* C *là tập con lồi đóng khác rỗng trong* E, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *là ánh xạ thỏa mãn (A1) – (A4),* $r > 0$ *và* $u \in C$. *Khi đó,*

(1) [3] *Tồn tại* $w \in C$ *sao cho* $f(w, y) + \frac{1}{r}\langle y - w, Jw - Ju\rangle \geq 0$ *với mọi* $y \in C$.

(2) [8, 10] *Xét ánh xạ* $K_r : E \to C$ *được định nghĩa bởi*

$$K_r = \{w \in C : f(w, y) + \frac{1}{r}\langle y - w, Jw - Ju\rangle \geq 0, \forall y \in C\}.$$

Khi đó

(a) K_r *là ánh xạ đơn trị.*

(b) K_r *là ánh xạ không giãn vững, nghĩa là, với mọi* $u, v \in E$, *ta có*

$$\langle K_r u - K_r v, JK_r u - JK_r v\rangle \leq \langle K_r u - K_r v, Ju - Jv\rangle.$$

(c) $F(K_r) = EP(f)$.

(d) K_r *là ánh xạ tựa* ϕ- *không giãn.*

(e) $\phi(q, K_r u) + \phi(K_r u, u) \leq \phi(q, u)$ *với mọi* $q \in F(K_r)$.

(f) $EP(f)$ *là tập lồi và đóng.*

2. Các kết quả chính

Trước hết, tương tự với khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong [5, Definition 2], chúng tôi giới thiệu định nghĩa ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn. Đồng thời, chúng tôi cũng thiết lập một số tính chất của tập điểm bất động $F(T)$ với T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn.

Định nghĩa 2.1. Cho E là không gian Banach, trơn, C là tập con khác rỗng trong E, ϕ là phiến hàm Lyapunov và ánh xạ $T: C \to C$. Khi đó, T được gọi là ánh xạ *thỏa mãn điều kiện* $(\phi\text{-}E_\mu)$ nếu tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho $\sqrt{\phi(x,Ty)} \leq \mu\sqrt{\phi(x,Tx)} + \sqrt{\phi(x,y)}$ với mọi $x,y \in C$.

Nhận xét 2.2. *Khi E là không gian Hilbert thì $\phi(x,y) = ||x-y||^2$ với mọi $x,y \in E$. Khi đó, ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trở thành ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).*

Mệnh đề 2.3. *Cho E là không gian Banach trơn, lồi chặt, phản xạ, C là tập con khác rỗng trong E và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong C sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Khi đó, T là ánh xạ tựa ϕ- không giãn trong C.*

Chứng minh. Với $p \in F(T)$ và $x \in C$, vì T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ nên

$$\sqrt{\phi(p,Tx)} \leq \mu\sqrt{\phi(p,Tp)} + \sqrt{\phi(p,x)} = \mu\sqrt{\phi(p,p)} + \sqrt{\phi(p,x)}.$$

Theo Nhận xét 1.3, ta có $\phi(p,p) = 0$. Do đó, $\phi(p,Tx) \leq \phi(p,x)$ với $p \in F(T)$ và $x \in C$. Điều này có nghĩa T là ánh xạ tựa ϕ- không giãn. □

Bằng cách sử dụng Bổ đề 1.11 và Mệnh đề 2.3, ta nhận được tính chất lồi đóng của tập điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ như sau.

Mệnh đề 2.4. *Cho E là không gian Banach lồi chặt, trơn, phản xạ, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong E và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$. Khi đó, $F(T)$ là tập con lồi đóng trong C.*

Mệnh đề 2.5. *Cho E là không gian Banach lồi đều, trơn, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong E và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ và dãy $\{x_n\}$ trong C sao cho $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,x) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,Tx_n) = 0$. Khi đó, $x \in F(T)$.*

Chứng minh. Do T thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong C nên

$$\sqrt{\phi(x_n,Tx)} \leq \mu\sqrt{\phi(x_n,Tx_n)} + \sqrt{\phi(x_n,x)}.$$

Kết hợp với giả thiết $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,x) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,Tx_n) = 0$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,Tx) = 0.$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,x) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,Tx) = 0$ nên theo Bổ đề 1.4 và tính duy nhất của giới hạn ta được $x = Tx$. Do đó, $x \in F(T)$. □

Tiếp theo, bằng cách tương tự dãy lặp hỗn hợp trong [2, Theorem 3.1], chúng tôi đề xuất dãy lặp hỗn hợp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ và thiết lập sự hội tụ của dãy lặp trong không gian Banach trơn đều và lồi đều.

Định lí 2.6. *Cho E là không gian Banach lồi đều và trơn đều, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong E, $f: C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn các giả thiết $(A1)-(A4)$ và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ sao cho $F := F(T) \cap EP(f) \neq \varnothing$. Xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in E,\ C_1 = C,\ x_1 = \Pi_{C_1} x_0 \\ u_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n) \\ v_n = K_{r_n} J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)JTu_n) \\ w_n = J^{-1}(\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n) \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : a_n\phi(z,v_n) + (1-a_n)\phi(z,w_n) \leq \phi(z,x_n)\} \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0, \end{cases}$$

trong đó K_{r_n} là ánh xạ xác định như trong Bổ đề 1.12, $0 \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq 1$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(1-\gamma_n) > 0$, $r_n \in [\varepsilon,\infty)$ với $\varepsilon > 0$ và $a_n \in [a,b] \subset (0,1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p = \Pi_F x_0$.

Chứng minh. Ta chứng minh theo 6 bước sau.

Bước 1. Chứng minh phép chiếu $\prod_F x_0$ xác định.

Bằng cách sử dụng Bổ đề 1.12, ta có $EP(f)$ là tập lồi đóng. Theo Mệnh đề 2.4, ta có $F(T)$ là tập lồi đóng. Do đó, $EP(f) \cap F(T)$ là tập lồi đóng. Kết hợp với giả thiết $F := F(T) \cap EP(f) \neq \varnothing$, ta có F là tập lồi đóng khác rỗng trong C. Vì vậy, theo Bổ đề 1.6, ta có phép chiếu $\prod_F x_0$ xác định.

Bước 2. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ xác định.

Theo Bổ đề 1.6, để chứng minh dãy $\{x_n\}$ xác định, ta cần chứng minh C_n là tập lồi đóng khác rỗng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy,

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : a_n\phi(z, v_n) + (1-a_n)\phi(z, w_n) \le \phi(z, x_n)\}$$
$$= \{z \in C_n : 2\langle z, Jx_n - a_nJv_n - (1-a_n)Jw_n\rangle \le \|x_n\|^2 - a_n\|v_n\|^2 - (1-a_n)\|w_n\|^2\}.$$

Từ định nghĩa của C_n, ta suy ra C_n là tập lồi đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp theo, ta chứng minh $F \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với $n=1$, ta có $F \subset F(T) \subset C = C_1$. Giả sử rằng $F \subset C_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $F \subset C_{n+1}$. Thật vậy, với $u \in F$ ta có $u \in C_n$. Theo Mệnh đề 2.3, ta có T cũng là ánh xạ tựa ϕ- không giãn. Do đó, từ (1.4) ta có

$$\begin{aligned}\phi(u, u_n) &= \phi(u, J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n)) \\ &\le \alpha_n\phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, Tx_n) \\ &\le \alpha_n\phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, x_n) \\ &= \phi(u, x_n). \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Do K_{r_n} là ánh xạ tựa ϕ- không giãn, T là ánh xạ ánh xạ tựa ϕ- không giãn và (2.1), ta được

$$\begin{aligned}\phi(u, v_n) &= \phi(u, K_{r_n}J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)JTu_n)) \\ &\le \phi(u, J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)JTu_n)) \\ &\le \beta_n\phi(u, x_n) + (1-\beta_n)\phi(u, Tu_n) \\ &\le \beta_n\phi(u, x_n) + (1-\beta_n)\phi(u, u_n) \\ &\le \beta_n\phi(u, x_n) + (1-\beta_n)\phi(u, x_n) \\ &= \phi(u, x_n). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Khi đó, từ (2.1) và (2.2), ta có

$$\begin{aligned}\phi(u, w_n) &= \phi(u, J^{-1}(\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n)) \\ &\le \gamma_n\phi(u, u_n) + (1-\gamma_n)\phi(u, Tv_n) \\ &\le \gamma_n\phi(u, u_n) + (1-\gamma_n)\phi(u, v_n) \\ &\le \gamma_n\phi(u, x_n) + (1-\gamma_n)\phi(u, x_n) \\ &= \phi(u, x_n). \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Nhân hai vế của (2.2) với a_n, nhân hai vế của (2.3) với $1 - a_n$ và cộng hai vế của hai bất đẳng thức vừa nhận được, ta có

$$a_n\phi(u, v_n) + (1-a_n)\phi(u, w_n) \le a_n\phi(u, x_n) + (1-a_n)\phi(u, x_n) = \phi(u, x_n).$$

Điều này có nghĩa là $u \in C_{n+1}$. Do đó, $F \subset C_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ những chứng minh trên và kết hợp với giả thiết F là tập khác rỗng, ta suy ra C_n với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ là tập lồi đóng khác rỗng. Sử dụng Bổ đề 1.6, ta có phép chiếu $x_n = \prod_{C_n} x_0$ là xác định. Do đó, dãy $\{x_n\}$ xác định.

Bước 3. Chứng minh $\{\phi(x_n, x_0)\}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, vì $x_n = \prod_{C_n} x_0$ nên theo Bổ đề 1.6 ta có

$$\phi(x_n, x_0) \le \phi(z, x_0) \text{ với mọi } z \in C_n. \quad (2.4)$$

Khi đó, với $u \in F$ ta có $u \in C_n$. Kết hợp với (2.4), ta có $\phi(x_n, x_0) \le \phi(u, x_0)$. Điều này có nghĩa là $\{\phi(x_n, x_0)\}$ bị chặn. Mặt khác, vì $C_{n+1} \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$x_{n+1} = \prod_{C_{n+1}} x_0 \in C_{n+1} \subset C_n. \quad (2.5)$$

Do đó, từ (2.4) và (2.5), ta được $\phi(x_n, x_0) \le \phi(x_{n+1}, x_0)$ hay $\{\phi(x_n, x_0)\}$ là dãy đơn điệu tăng. Kết hợp với tính bị chặn của $\{\phi(x_n, x_0)\}$ ta suy ra tồn tại giới hạn của $\{\phi(x_n, x_0)\}$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, x_0) = r. \quad (2.6)$$

Mặt khác, vì $x_n = \prod_{C_n} x_0$ nên theo Bổ đề 1.8, ta có

$$\phi(u, x_n) + \phi(x_n, x_0) \le \phi(u, x_0) \text{ với mọi } u \in C_n. \quad (2.7)$$

Kết hợp (2.7) với (2.5), ta được

$$0 \le \phi(x_{n+1}, x_n) \le \phi(x_{n+1}, x_0) - \phi(x_n, x_0). \quad (2.8)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.8) và sử dụng (2.6), suy ra $\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = 0.$ (2.9)

Kết hợp (2.9) với Bổ đề 1.4, ta được

$$\lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0. \quad (2.10)$$

Bước 4. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $p \in C$.

Với mọi $m \ge n$ ta có $C_m \subset C_n$. Do đó $x_m = \prod_{C_m} x_0 \in C_m \subset C_n$. Kết hợp điều này với (2.8), ta được

$$0 \le \phi(x_m, x_n) \le \phi(x_m, x_0) - \phi(x_n, x_0). \quad (2.11)$$

Khi đó, từ (2.6) và (2.11), ta suy ra $\lim_{m,n\to\infty} \phi(x_m, x_n) = 0.$ Theo Bổ đề 1.4, ta được $\lim_{m,n\to\infty} ||x_m - x_n|| = 0.$ Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong C. Mặt khác, vì C là tập đóng trong E nên C có tính đầy đủ. Khi đó, tồn tại $p \in C$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p. \quad (2.12)$$

Bước 5. Chứng minh $p \in F = F(T) \cap EP(f)$.

Trước hết, ta chứng minh $p \in F(T)$. Vì $x_{n+1} = \prod_{C_{n+1}} x_0 \in C_{n+1}$ nên

$$a_n\phi(x_{n+1}, v_n) + (1-a_n)\phi(x_{n+1}, w_n) \le \phi(x_{n+1}, x_n).$$

Kết hợp điều này với (2.9) và $a_n \in [a,b] \subset (0,1)$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, v_n) = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, w_n) = 0. \quad (2.13)$$

Kết hợp (2.13) và Bổ đề 1.4, ta được

$$\lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - v_n|| = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - w_n|| = 0. \quad (2.14)$$

Mà $||x_n - v_n|| \le ||x_{n+1} - x_n|| + ||x_{n+1} - v_n||$. Kết hợp điều này với (2.10), (2.14) và Bổ đề 1.5, ta có

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - v_n|| = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} ||Jx_n - Jv_n|| = 0. \quad (2.15)$$

Từ (2.12), (2.15) và Bổ đề 1.5, ta có $\lim_{n\to\infty} ||v_n - p|| = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \phi(v_n, p) = 0.$ (2.16)

Tương tự, ta được

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - w_n|| = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} ||Jx_n - Jw_n|| = 0. \quad (2.17)$$

Mặt khác, với $u \in F$, sử dụng Bổ đề 1.8 và lập luận tương tự như trong chứng minh (2.3), ta có

$$\begin{aligned}\phi(u, w_n) &= \phi(u, J^{-1}(\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n)) \\ &= ||u||^2 - 2\langle u, \gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n\rangle + ||\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n||^2 \\ &\le ||u||^2 - 2\langle u, \gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n\rangle + \gamma_n ||Ju_n||^2 \\ &\quad + (1-\gamma_n)||JTv_n||^2 - \gamma_n(1-\gamma_n)g(||Ju_n - JTv_n||) \\ &\le \phi(u, x_n) - \gamma_n(1-\gamma_n)g(||Ju_n - JTv_n||).\end{aligned}$$

Do đó

$$\gamma_n(1-\gamma_n)g(||Ju_n - JTv_n||) \le \phi(u, x_n) - \phi(u, w_n). \quad (2.18)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}|\phi(u, x_n) - \phi(u, w_n)| &= \left|2\langle u, Jw_n - Jx_n\rangle + ||x_n||^2 - ||w_n||^2\right| \\ &\le 2\left|\langle u, Jw_n - Jx_n\rangle\right| + \left|||x_n|| - ||w_n||\right|(||x_n|| + ||w_n||) \\ &\le 2||u||||Jw_n - Jx_n|| + ||x_n - w_n||(||x_n|| + ||w_n||).\end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (2.17), ta được $\lim_{n\to\infty} |\phi(u, x_n) - \phi(u, w_n)| = 0.$ Kết hợp điều này với (2.18) và $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(1-\gamma_n) > 0,$ ta được $\lim_{n\to\infty} g(||Ju_n - JTv_n||) = 0.$ Khi đó, theo tính chất của hàm số g, ta suy ra $\lim_{n\to\infty} ||Ju_n - JTv_n|| = 0.$ Sử dụng Bổ đề 1.5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - Tv_n|| = 0. \quad (2.19)$$

Mặt khác, ta có $Ju_n = \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n$. Suy ra $||Ju_n - Jx_n|| = (1-\alpha_n)||x_n - Tx_n||$. Do $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ và $\{x_n\}$ bị chặn nên $\lim_{n\to\infty} ||Ju_n - Jx_n|| = 0.$ Sử dụng Bổ đề 1.5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - x_n|| = 0. \quad (2.20)$$

Từ (2.12), (2.20) và Bổ đề 1.5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - p|| = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} \phi(p, u_n) = 0. \quad (2.21)$$

Ta lại có

$$||v_n - Tv_n|| \le ||v_n - x_n|| + ||x_n - u_n|| + ||u_n - Tv_n||.$$

Kết hợp điều này với (2.15), (2.19) , (2.20) và Bổ đề 1.5, ta có $\lim_{n\to\infty} ||v_n - Tv_n|| = 0$ và

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v_n, Tv_n) = 0. \quad (2.22)$$

Kết hợp (2.16), (2.22) và Mệnh đề 2.4, ta được $p \in F(T)$.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh $p \in EP(f)$. Với $p \in F(T)$, ta có $\phi(p, Tu_n) \le \phi(p, u_n)$. Kết hợp điều này với (2.21), ta được

$$\lim_{n\to\infty}\phi(Tu_n, p) = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty}\|Tu_n - p\| = 0. \quad (2.23)$$

Ta cũng có $\|v_n - Tu_n\| \le \|v_n - p\| + \|p - Tu_n\|$. Kết hợp điều này với (2.23), (2.16) và sử dụng Bổ đề 1.5, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - Tu_n\| = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty}\|Jv_n - JTu_n\| = 0. \quad (2.24)$$

Mặt khác, với $n \in \mathbb{N}^*$, từ định nghĩa của K_{r_n} và $v_n = K_{r_n}J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)JTu_n)$, ta có

$$f(v_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - v_n, Jv_n - \beta_n Jx_n - (1-\beta_n)JTu_n\rangle \ge 0$$

với mọi $y \in E$. Từ giả thiết (A2), ta suy ra

$$\frac{1}{r_n}\langle y - v_n, \beta_n(Jv_n - Jx_n) - (1-\beta_n)(Jv_n - JTu_n)\rangle \ge -f(v_n, y) \ge f(y, v_n)$$

với mọi $y \in C$.

Kết hợp điều này với điều kiện (A4), (2.15), (2.16) và (2.24), ta được $f(y,p) \le 0$ với mọi $y \in C$. Đặt $y_t = ty + (1-t)p$ với $t \in (0,1]$, $y \in C$. Khi đó, $y_t \in C$ và $f(y_t, p) \le 0$. Từ giả thiết (A1) và (A4) ta được

$$0 = f(y_t, y_t) \le tf(y_t, y) + (1-t)f(y_t, p) \le tf(y_t, y).$$

Ta chia các vế của bất đẳng thức cho t, ta có $f(y_t, y) \ge 0$ với mọi $y \in E$. Cho $t \downarrow 0$ và sử dụng giả thiết $(A3)$, ta được $f(p,y) \ge 0$ với mọi $y \in E$ và do đó $p \in EP(f)$. Kết hợp với $p \in F(T)$, ta được $p \in F$.

Bước 6. Chứng minh $p = \prod_F x_0$.

Vì $x_{n+1} = \prod_{C_{n+1}} x_0$ nên sử dụng Bổ đề 1.7, ta có $\langle x_{n+1} - y, Jx_0 - Jx_{n+1}\rangle \ge 0$ với mọi $y \in C_{n+1}$. Với mọi $u \in F$, vì $F \subset C_{n+1}$ nên $u \subset C_{n+1}$. Do đó,

$$\langle x_{n+1} - u, Jx_0 - Jx_{n+1}\rangle \ge 0. \quad (2.25)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.25), ta được $\langle p - u, Jx_0 - Jp\rangle \ge 0$ với mọi $u \in F$. Theo Bổ đề 1.7, ta có $p = \Pi_F x_0$. □

Lưu ý rằng khi E là không gian Hilbert thì $\phi(x,y) = \|x-y\|^2$ với mọi $x, y \in E$ và J là ánh xạ đồng nhất. Do đó, từ Định lí 2.6, ta nhận được kết quả sau.

Hệ quả 2.7. *Cho E là không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong E, $f: C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn các giả thiết $(A1)-(A4)$ và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) sao cho $F := F(T) \cap EP(f) \ne \varnothing$. Xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in E, \ C_1 = C, \ x_1 = P_{C_1}x_0 \\ u_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \\ v_n = K_{r_n}(\beta_n x_n + (1-\beta_n)Tu_n) \\ w_n = \gamma_n u_n + (1-\gamma_n)Tv_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : a_n\|v_n - z\|^2 + (1-a_n)\|w_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \end{cases}$$

trong đó K_{r_n} là ánh xạ xác định như trong Bổ đề 1.12, $0 \le \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \le 1$ sao cho $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty}\gamma_n(1-\gamma_n) > 0$, $r_n \in [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$ và $a_n \in [a,b] \subset (0,1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p = P_F x_0$.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ dãy lặp cho bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$.

Ví dụ 2.8. Cho $E = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn $\|u\| = |u|$ với mọi $u \in E$. Khi đó, ánh xạ $J = I$ và phiếm hàm Lyapunov $\phi(u,v) = (u-v)^2$ với mọi $u, v \in E$. Xét bài toán (EP) sau:

Tìm $p \in C$ sao cho $f(p,y) \ge 0$ với mọi $y \in C$, trong đó, $C = [-1,1]$ và song hàm $f: C \times C \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x,y) = -2x^2 + xy + y^2$ với mọi $x, y \in C$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra f

thỏa mãn các giả thiết (A1) – (A4). Tiếp theo, ta xác định công thức của H_r được định nghĩa như trong Bổ đề 1.12. Với mọi $y \in C$ và $r > 0$, ta có

$$f(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z, z-x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow ry^2+(rz+z-x)y-2rz^2+xz-z^2 \geq 0. \quad (2.26)$$

Ta thấy

$$\varphi(y) = ry^2 + (rz + z - x)y - 2rz^2 + xz - z^2$$

là một hàm số bậc hai theo biến y.

Do đó (2.26) trở thành $\varphi(y) \geq 0$ với mọi $y \in C$. Điều này tương đương với tam thức bậc hai $\Delta \leq 0$ hay $((1+3r)z - x)^2 \leq 0$. Vì vậy $z = \dfrac{x}{3r+1}$. Suy ra $H_r(x) = \dfrac{x}{3r+1}$ với mọi $x \in C$. Theo Bổ đề 1.12, ta có $F(H_r) = EP(f) = \{0\}$. Bây giờ xét ánh xạ $T: C \to C$ xác định bởi $Tx = \dfrac{x}{x+2}$ với mọi $x \in C$. Khi đó, T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ với $\mu \geq 1$. Thật vậy, ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Với $x = 0$ và với mọi $y \in C$, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{\phi(x,Ty)} &= |0 - Ty| \\ &= \left|\frac{y}{y+2}\right| \\ &\leq |y| \\ &= \sqrt{\phi(x,y)} \\ &= \mu\sqrt{\phi(x,Tx)} + \sqrt{\phi(x,y)}.\end{aligned}$$

Trường hợp 2. Với $x \neq 0$ ta có

$$\sqrt{\phi(x,Ty)} = \left|x - \frac{y}{y+2}\right| \leq \left|y - \frac{2}{y+2} + 1\right| + |x - y|.$$

Đặt $f(x) = x - \dfrac{2}{x+2} + 1$ với $x \in C$. Ta có $\max\limits_{x\in C} |f(x)| = f(-1) = 2$, $\min\limits_{x\in C} |f(x)| = f(0) = 0$.

Suy ra, tồn tại $c \in C$ sao cho $|f(c)| = \min\limits_{x\in C, x\neq 0} |f(x)| \neq 0$. Do đó, tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho

$$\begin{aligned}\left|y - \frac{2}{y+2} + 1\right| &\leq |f(-1)| \\ &= 2 \\ &\leq \mu\, |f(c)| \\ &\leq \mu \left|x - \frac{2}{x+2} + 1\right| \\ &= \mu\sqrt{\phi(x,Tx)}.\end{aligned}$$

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho $\sqrt{\phi(x,Ty)} \leq \mu\sqrt{\phi(x,Tx)} + \sqrt{\phi(x,y)}$. Điều này có nghĩa là T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ với $\mu \geq 1$. Ta cũng có $F(T) = \{-1; 0\}$. Chọn $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\beta_n = e^{-n}$, $\gamma_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$, $a_n = \dfrac{1}{2}$, $r_n = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ trong Định lí 2.6 được xác định bởi

$$x_0 \in E,\ C_1 = C,\ x_1 = P_{C_1}x_0,$$

$$u_n = \frac{n}{n+1}x_n + \frac{x_n}{(n+1)(2+x_n)},$$

$$v_n = \frac{1}{4}\left(e^{-n}x_n + (1-e^{-n})\frac{u_n}{2+u_n}\right),$$

$$w_n = \frac{n+1}{2n+3}u_n + \frac{(n+2)x_n}{(2n+3)(2+x_n)},$$

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : |v_n - z|^2 + |w_n - z|^2 \leq 2|x_n - z|^2\},$$

$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0 = \arg\min_{x\in C_{n+1}}\{|x - x_0|\}.$$

Như vậy, theo Định lí 2.6, ta được $\{x_n\}$ hội tụ đến $P_F x_0 = 0$.

Tài liệu tham khảo

[1]. A. Alber (1996), "Metric and Generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications", *In: Kartosator, A.G. (ed.) Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, vol. 178 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, p. 15-50, Dekker, New York.

[2]. S. Alizadeh and F. Moradlou (2016), "A strong convergence theorem for equilibrium problems and generalized hybrid mappings", *Mediterr. J. Math.*, 13 (1), p. 379-390.

[3]. E. Blum and W. Oettli (1994), "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *Math. Stud.*, (63), p. 123-145.

[4]. Z. Fuhai and Y. Li (2012), "Halpern-type iterations for strong relatively nonexpansive multi-valued mappings in Banach spaces", *Stud. Math. Sci.*, 4 (2), p. 40-47.

[5]. J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, and T. Suzuki (2011), "Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 375 (1), p. 185-195.

[6]. D. V. Hieu, L. D. Muu, and P. K. Anh (2016), "Parallel hybrid extragradient methods for pseudomonotone equilibrium problems and nonexpansive mappings", *Numer. Algor.*, 73 (1), p. 197-217.

[7]. S. Kamimura and W. Takahashi (2002), "Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space", *SIAM J. Optim.,* 13 (3), p. 938-945.

[8]. X. Qin, Y. J. Cho, and S. M. Kang (2009), "Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces", *J. Comput. Appl. Math.*, (225), p. 20-30.

[9]. X. Qin, Y. J. Cho, S. M. Kang, and H. Zhou (2009), "Convergence of a modified Halpern-type iteration algorithm for quasi-ϕ- nonexpansive mappings", *Appl. Math. Lett.,* (22), p. 1051-1055.

[10]. W. Takahashi and K. Zembayashi (2009), "Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, (70), p. 45-57.

[11]. H. K. Xu (1991), "Inequalities in Banach spaces with applications", *Nonlinear Anal.*, 16 (12), p. 1127-1138.

CONVERGENCE OF HYBRID ITERATION FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS AND MAPPINGS SATISFYING CONDITION $(\phi\text{-}E_\mu)$ IN UNIFORMLY CONVEX AND UNIFORMLY SMOOTH BANACH SPACES

Summary

In this paper, we introduce the notion of a mapping satisfying condition $(\phi\text{-}E_\mu)$ in smooth Banach spaces, and propose a hybrid iteration for finding a common element of the solution set of an equilibrium problem and the fixed point set of a mapping satisfying condition $(\phi\text{-}E_\mu)$, and also establish the convergence of this iteration in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. These results are the generations of the main ones in [2] from Hilbert spaces to uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. We also provide an illustrated example for the obtained result.

Keywords: hybrid iteration, equilibrium problem, mapping satisfying condition $(\phi\text{-}E_\mu)$, uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces.

Ngày nhận bài: 28/4/2017; Ngày nhận lại: 25/6/2017; Ngày duyệt đăng: 26/6/2017.