ỨNG DỤNG NỘI SUY B-SPLINE TRONG THIẾT LẬP QUỸ ĐẠO CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐỐI TƯỢNG ĐỘNG

• Hoàng Thái Hổ(*), Yu. N. Kosnikov(**)

Tóm tắt

Bài báo trình bày một phương pháp mới và phần mềm thiết lập quỹ đạo chuyển động của các đối tượng động trong không gian bằng cách áp dụng phương pháp nội suy B-spline trên tập hợp các điểm quy chiếu cho trước. Sau đó, để đảm bảo đường cong B-spline đi qua các điểm đó, tập hợp các điểm quy chiếu cho trước được thay thế bằng một tập hợp các điểm quy chiếu mới. Cuối cùng kết hợp với thuật toán sai phân hữu hạn trong tính toán, tốc độ biểu thị hình học của quỹ đạo sẽ tăng lên và giảm thiểu tài nguyên trong bộ lưu trữ máy tính.

Từ khóa: giám sát, quỹ đạo, đối tượng động, B-spline, nội suy, phương pháp sai phân hữu hạn.

1. Đặt vấn đề

Các hệ thống theo dõi, giám sát sự phân bố của các đối tượng động trong không gian là những phần của một hệ thống lớn (metasystem) nhằm thực hiện các mục đích khác nhau. Ví dụ như: hệ thống kiểm soát giao thông và vận chuyển hàng không; hệ thống tự động hóa chỉ huy các phân đội trong quân đội hay hệ thống bảo vệ... Hệ thống giám sát trong các metasystem đó có nhiệm vụ cung cấp các thông tin về vị trí và các thông số chuyển động của đối tượng nhằm kiểm tra chúng trong trạng thái thời gian thực (real time) (RT). Bằng việc thiết lập quỹ đạo chuyển động của đối tượng kết hợp với bản đồ địa hình hoặc kế hoạch trước đó sẽ cung cấp cho chúng ta không chỉ vị trí của đối tượng tại thời điểm bất kỳ mà còn giúp ta đánh giá, phân tích chuyển động đó để có những lựa chọn tối ưu nhất cho quá trình xử lý và thực thi các nhiệm vụ cụ thể [1], [2].

Trong trường hợp vị trí các đối tượng thay đổi theo một chu kỳ nhất định (ví dụ như các đối tượng có cài đặt thiết bị định vị GPS), thì dữ liệu về vị trí của các đối tượng có thể rất lớn, vì vậy việc giám sát sẽ gặp nhiều khó khăn. Các metasystem không thể sử dụng tất cả tài nguyên của mình cho quá trình giám sát. Và như vậy, trong khoảng thời gian liên tục mỗi đối tượng sẽ cung cấp một tập hợp các điểm quy chiếu (vị trí mà đối tượng đó đã đi qua), mà thứ tự sắp xếp của các điểm sẽ hình thành nên quỹ đạo chuyển động của đối tượng đó. Chính vì vậy để thiết lập quỹ đạo chuyển động của mỗi đối tượng chúng ta tiến hành giải bài toán nội suy trong trạng thái RT trên tập hợp các điểm quy chiếu cho trước trong không gian.

2. Một số phương pháp nội suy thiết lập quỹ đạo chuyển động của đối tượng trong không gian

Phương pháp nội suy đơn giản nhất là liên kết các điểm quy chiếu với nhau theo thứ tự bằng các đoạn thẳng nó được gọi là nội suy tuyến tính (hay: đoạn - tuyến tính). Ưu điểm của phương pháp này là thuật toán đơn giản và hiệu suất tính toán cao. Tuy nhiên đối với các điểm tọa độ phân bố thưa, không đều thì quỹ đạo thu được sẽ có dạng đường gấp khúc. Trong một số trường hợp điều đó có thể chấp nhận được, song với việc thể hiện quỹ đạo kết hợp với địa hình gấp khúc sẽ cho ta một hình dung sai lệch về trạng thái chuyển động của đối tượng và dẫn tới kết quả của quá trình giám sát sẽ bị sai lệch. Đồng thời trong bước thiết lập quỹ đạo chúng ta cần sử dụng các đoạn thẳng tuyến tính cụ thể được hỗ trợ bởi hệ đồ họa máy tính. Ví dụ trong thư viện đồ họa OpenGL để vẽ đoạn thẳng ta sử dụng câu lệnh glBegin – glEnd với dạng GL_LINE_STRIP [6]. Điều đó nghĩa là để tăng tính hiện thực thì quỹ đạo thu được phải là một đường cong mịn.

Những phương pháp nội suy đa thức cổ điển như Newton, Lagrange hay Chebyshev trong trường hợp này không thu được những kết quả phù hợp với yêu cầu trên vì chúng quá phức tạp trong việc tính toán với số lượng lớn các điểm nội suy và đường cong thu được tồn tại những dao động Runge. Đường cong mịn và không dao động có thể thu được bởi các phương pháp nội

(*) Nghiên cứu sinh, Trường Đại học Tổng hợp Penza, Liên bang Nga.
(**) Trường Đại học Tổng hợp Penza, Liên bang Nga.

suy từng phần Spline, tuy nhiên chúng cũng tồn tại những nhược điểm. R-spline thì quá phức tạp trong tính toán, B-spline và Beta-spline thì đường cong thu được hầu như không đi qua các điểm quy chiếu cho trước, còn spline Bezier đòi hỏi phải xác định thêm các điểm phụ trên các tiếp tuyến với đường cong tại các điểm nội suy [3]. Trong các tài liệu tham khảo có chỉ ra rằng bằng cách tìm các tập hợp điểm quy chiếu mới chúng ta có thể xây dựng đường cong B-spline đi qua các điểm quy chiếu cho trước [5]. Tuy nhiên trong các tài liệu đó chưa đưa ra phương pháp cụ thể để tìm tập hợp điểm quy chiếu mới.

Như vậy chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp nội suy B-spline để thu được đường cong quỹ đạo của đối tượng mà đảm bảo được độ mịn và không dao động. Bài viết này đề xuất thuật toán tìm tập hợp điểm quy chiếu mới để đường cong B-spline đi qua các điểm quy chiếu cho trước.

3. Phương pháp nội suy B-spline thiết lập quỹ đạo đi qua các điểm quy chiếu cho trước

Chúng ta biết rằng đường cong B-spline được thành lập từ các phân đoạn mà mỗi phân đoạn đó được tạo nên từ tập hợp 4 điểm quy chiếu. Để thiết lập phân đoạn kế tiếp chúng ta sử dụng 3 điểm quy chiếu cũ và 1 điểm quy chiếu mới. Phân đoạn thứ i của đường cong B-spline thành lập trên 4 điểm quy chiếu RP_{i-1}, RP_i, RP_{i+1}, RP_{i+2}, cho trước với vecter tọa độ $p_j = | x_j \quad y_j \quad z_j |$, (với $j = (i-1), i, (i+1), (i+2)$) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$r = T.M.P^T, \qquad (1)$$

với $r = | x \quad y \quad z |$ là vectơ tọa độ điểm hiện tại của phân đoạn;

$T = | t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1 |$ là vectơ lũy thừa với tham số $t, t = [0,1]$;

$P = | p_{i-1} \quad p_i \quad p_{i+1} \quad p_{i+2} |$ là vectơ tọa độ của các điểm quy chiếu;

M là ma trận cơ sở B-spline:

$$M = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tham số t xác định các bước dọc theo phân đoạn. Số lượng các điểm trung gian trên phân đoạn phụ thuộc vào giá trị cho trước t. Với t thay đổi trong đoạn [0,1] thì phân đoạn của đường cong được bắt đầu từ điểm RP_i và kết thúc tại điểm RP_{i+1}, tuy vậy nó không đi qua các điểm đó. Để giải bài toán nội suy chính xác, chúng ta cần thêm vào các điểm quy chiếu mới RP_i^*, RP_{i+1}^* sao cho phân đoạn thu được đi qua các điểm RP_i, RP_{i+1}. Với điều kiện phân đoạn đi qua các điểm quy chiếu RP_i, RP_{i+1}, bằng cách cho t lần lượt nhận các giá trị là 0 và 1 ở phương trình (1) ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} | x_i \quad y_i \quad z_i | = | 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 | .M. | p_{i-1} \quad p_i^* \quad p_{i+1}^* \quad p_{i+2} |^T \\ | x_{i+1} \quad y_{i+1} \quad z_{i+1} | = | 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 | .M. | p_{i-1} \quad p_i^* \quad p_{i+1}^* \quad p_{i+2} |^T \end{cases},$$

với p_i^*, p_{i+1}^* là vectơ tọa độ của các điểm quy chiếu mới.

Hệ phương trình thu được có thể viết dưới dạng tọa độ với đại lượng tọa độ mới k^* và đại lượng tọa độ ban đầu k ($k^*, k = x, y, z$). Như vậy với $i = 1$ ta thu được hệ hai phương trình hai ẩn với nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 4k_1^* + k_2^* = 6k_1 - k_0 \\ k_1^* + 4k_2^* = 6k_1 - k_2 \end{cases}.$$

Để thu được hai phân đoạn của đường cong chúng ta cần sử dụng 5 điểm quy chiếu. Trong trường hợp này, để tìm các điểm quy chiếu mới ta sử dụng hệ phương trình với 3 ẩn số:

$$\begin{cases} 4k_1^* + k_2^* + 0 \cdot k_3^* = 6k_1 - k_0 \\ k_1^* + 4k_2^* + k_3^* = 6k_2 \\ 0 \cdot k_1^* + k_2^* + 4 \cdot k_3^* = 6k_3 - k_4 \end{cases}.$$

Trong trường hợp tổng quát với tập hợp RP gồm N điểm quy chiếu

$$RP = \{RP_0, RP_1, RP_2, \ldots, RP_{N-2}, RP_{N-1}\},$$

có thể thành lập ($N-3$) phân đoạn. Để tìm ($N-2$) điểm quy chiếu mới, hệ phương trình có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$M1 \cdot P^* = M2, \qquad (2)$$

với: P^* là ma trận tọa độ các điểm quy chiếu mới:

$$(P^*)^T = | p_2^* \quad p_3^* \quad \cdots \quad p_{N-1}^* |;$$

$M1$ là ma trận hệ số tự do của tọa độ các điểm quy chiếu mới:

$$M1_{(N-2)\times(N-2)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$M2$ là ma trận các hệ số tự do (bao gồm tọa độ các điểm quy chiếu ban đầu):

$$M2_{(N-2)\times 3} = \begin{vmatrix} (6x_1 - x_0) & (6y_1 - y_0) & (6z_1 - z_0) \\ 6x_2 & 6y_2 & 6z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 6x_{N-3} & 6y_{N-3} & 6z_{N-3} \\ (6x_{N-2} - x_{N-1}) & (6y_{N-2} - y_{N-1}) & (6z_{N-2} - z_{N-1}) \end{vmatrix}.$$

Nghiệm của phương trình (2) có thể thu được ở dạng ma trận như sau:

$$P^* = (M1)^{-1} \cdot M2. \qquad (3)$$

Nếu có thể tìm được ma trận nghịch đảo $(M1)^{-1}$, ma trận nghiệm thu được (3) chính là tọa độ các điểm quy chiếu mới cần tìm. Chúng ta có thể dễ dàng giải phương trình (2) bằng nhiều phương pháp đã biết, ví dụ phương pháp Gauss.

Tuy vậy đường cong thu được từ các phân đoạn B-spline không đi qua các điểm quy chiếu đầu và cuối. Điều đó là không thể chấp nhận khi biểu thị quỹ đạo chuyển động của đối tượng. Để kéo đường cong tới gần các điểm đầu và cuối chúng ta cần sử dụng phương pháp bội số điểm [3]. Bản chất của nó là chúng ta lặp lại hai lần các điểm quy chiếu đầu và cuối. Điều đó có nghĩa là để thành lập quỹ đạo của đối tượng đi qua N điểm quy chiếu ta phải sử dụng tập hợp $\overline{RP}$ gồm ($N+4$) điểm quy chiếu:

$$\overline{RP} = \left\{\overline{RP}_0, \overline{RP}_1, \overline{RP}_2, \overline{RP}_3, \ldots, \overline{RP}_{N+1}, \overline{RP}_{N+2}, \overline{RP}_{N+3}\right\}, \quad (4)$$

với tọa độ các điểm $\overline{RP}_0$, $\overline{RP}_1$ bằng với tọa độ điểm RP_2, tọa độ các điểm $\overline{RP}_{N+2}$, $\overline{RP}_{N+3}$ bằng với tọa độ điểm RP_{N+1}, còn tọa độ các điểm khác tương ứng với tọa độ các điểm ban đầu trong tập hợp RP:

$$\overline{RP}_l = RP_{l-2} \quad \text{với } 2 \le l \le N+1.$$

Khi quan sát chuyển động của một đối tượng ta thấy rằng tập hợp các điểm quy chiếu của quỹ đạo không ngừng tăng lên. Nếu mỗi lần như vậy quỹ đạo được tính theo một tập hợp điểm quy chiếu thì thời gian tính toán cũng tăng lên. Khi đó việc giám sát một số lượng đối tượng đủ lớn trong trạng thái RT sẽ dễ bị rối loạn. Điều đó nghĩa là trong quá trình tính toán quỹ đạo cần phải đưa vào một số các tập con các điểm quy chiếu. Các tập con này sẽ tự làm mới chúng mỗi khi thêm vào một điểm mới. Các phần quỹ đạo "cũ" được lưu lại trong bộ nhớ máy tính và được lặp lại trong quá trình biểu thị thay vì phải tính lại từ đầu. Tuy vậy việc liên tục làm mới tập con các điểm quy chiếu sẽ dẫn tới những sự thay đổi về hình dạng quỹ đạo mặc dù nó vẫn đi qua tất cả các điểm quy chiếu. Mức độ cho phép của sự thay đổi đó phụ thuộc vào tỉ lệ biểu thị của quỹ đạo đối tượng. Tỉ lệ đó được xác định bởi số lượng điểm quy chiếu tham gia trong mỗi lần tính toán và được xác định bằng thực nghiệm.

4. Thuật toán thiết lập quỹ đạo chuyển động của đối tượng trong không gian

Khi tìm điểm hiện tại của đường cong B-spline đòi hỏi chúng ta phải tính toán với hàm số bậc ba tham số t, bao gồm các phép tính lũy thừa và nhân. Với số lượng lớn các phép tính như vậy sẽ làm tiêu tốn khá nhiều thời gian. Điều này có thể được giải quyết bằng việc áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn [5]. Đó là một phương pháp hiệu quả được sử dụng cho đa thức lũy thừa bậc n chỉ với n phép tính cộng.

Quá trình tính hàm lũy thừa $f(t)$ tham số t được thực hiện lần lượt như sau

$$\begin{gathered} \Delta^0_{t(m+1)} = \Delta^0_{tm} + \Delta^1_{tm}, \quad \Delta^0_{t0} = f(t)\big|_{t=0}, \\ \Delta^1_{t(m+1)} = \Delta^1_{tm} + \Delta^2_{tm}, \quad \Delta^1_{t0} = \Delta^1_t\big|_{t=0}, \\ \cdots \\ \Delta^{n-1}_{t(m+1)} = \Delta^{n-1}_{tm} + \Delta^n_{tm}, \quad \Delta^{n-1}_{t0} = \Delta^{n-1}_t\big|_{t=0}, \\ \Delta^n_t = const, \end{gathered} \qquad (5)$$

với: Δ^s_t là sai phân hữu hạn bậc s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) theo tham số t, với $\Delta^0_t = f(t)$;

Δ^s_{t0} là sai phân hữu hạn ban đầu (với $t = 0$);

m là thứ tự bước tính.

Để áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn thì phương trình B-spline (1) cần được viết dưới dạng hệ các đa thức có dạng:

$$k_i = a_{ki}t^3 + b_{ki}t^2 + c_{ki}t + d_{ki}, \quad (6)$$

với: i là số thứ tự phân đoạn đường cong, $i = 0,\ 1,\ 2,...$;

k là tọa độ điểm hiện tại của phân đoạn, $k = x, y, z$;

a, b, c, d là hệ số công thức của phân đoạn.

So sánh các dạng (1) và (6) theo chiều ngược lại, ta dễ dàng biểu diễn các hệ số công thức theo tọa độ các điểm quy chiếu cho trước:

$$\begin{aligned} a_{ki} &= \frac{1}{6}(k_{i+2} - 3k_{i+1} + 3k_i - k_{i-1}),\\ b_{ki} &= \frac{1}{6}(3k_{i+1} - 6k_i + 3k_{i-1}),\\ c_{ki} &= \frac{1}{6}(3k_{i+1} - 9k_{i-1}),\\ d_{ki} &= \frac{1}{6}(k_{i+1} + 4k_i + k_{i-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Khi đó công thức sai phân hữu hạn (5) đối với phân đoạn spline thứ i có dạng:

$$\Delta^{n-1}_{tki(m+1)} = \Delta^{n-1}_{tkim} + \Delta^{n}_{tkim},\ k = x, y, z, \quad (8)$$

còn các giá trị sai phân hữu hạn ban đầu được tính như sau:

$$\begin{aligned} \Delta^0_{tki0} &= k_i = d_{ki};\\ \Delta^1_{tki0} &= a_{ki}\delta_t^3 + b_{ki}\delta_t^2 + c_{ki}\delta_t;\\ \Delta^2_{tki0} &= 6a_{ki}\delta_t^3 + 2b_{ki}\delta_t^2;\\ \Delta^3_{tki0} &= 6a_{ki}\delta_t^3, \end{aligned} \quad (9)$$

với δ_t là giá trị của mỗi bước tính ($\delta_t = const$).

Những điểm trung gian được tính với mỗi bước δ_t trên đường cong. Chúng liên kết với nhau bằng những đoạn thẳng, chính vì vậy xuất hiện thuật ngữ quỹ đạo đoạn tuyến tính. Độ mịn của nó phụ thuộc vào sự lựa chọn δ_t. Sau khi tìm được các giá trị sai phân hữu hạn ban đầu, với phân đoạn kế tiếp của đường cong mỗi điểm trung gian sẽ được tính chỉ với ba phép tính cộng.

Như vậy, thuật toán mở rộng về việc xây dựng quỹ đạo cong của đối tượng trên cơ sở nội suy phân đoạn B-spline kết hợp với áp dụng phương pháp bội số điểm và sai phân hữu hạn bao gồm các bước sau:

- Nhận tọa độ các điểm quy chiếu theo thứ tự;

- Nhập dữ liệu đầu vào: số lượng điểm N và tọa độ của các điểm quy chiếu x_i, y_i, z_i ($i = 0,\ 1,...,\ N-1$), thiết lập ma trận tọa độ các điểm quy chiếu phù hợp với tập hợp RP;

- Tính hệ số tỉ lệ theo từng trục tọa độ x, y và z;

- Thiết lập các ma trận hệ số tự do $M1$, $M2$;

- Tìm các điểm quy chiếu mới: giải hệ phương trình (2) bằng phương pháp Gauss;

- Áp dụng phương pháp bội số điểm: thiết lập ma trận mới bao gồm tọa độ các điểm quy chiếu cho B-spline tương ứng với tập hợp $\overline{RP}$;

- Tính các hệ số của công thức B-spline theo phương trình (7);

- Tính giá trị hàm số (6) tại các điểm trung gian bằng phương pháp sai phân hữu hạn (phương trình (8),(9));

- Vẽ quỹ đạo chuyển động theo các điểm trung gian bằng các công cụ trong thư viện đồ họa máy tính.

5. Phần mềm thiết lập quỹ đạo chuyển động của đối tượng trong không gian

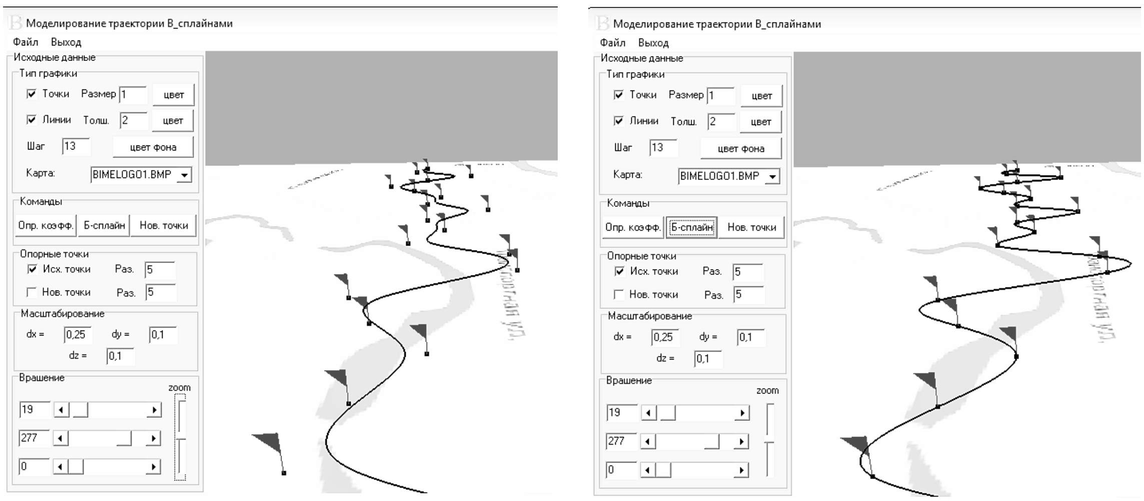
Phần mềm được viết bằng ngôn ngữ C^{++} trong môi trường Borland C++ Builder 6 trên cơ sở áp dụng thuật toán mở rộng trên. Cửa sổ chính của phần mềm thể hiện trên Hình 1.

Hình 1. Cửa sổ chính của phần mềm thiết lập quỹ đạo chuyển động của đối tượng

Phía bên trái của phần mềm cho phép chúng ta nhập các dữ liệu đầu vào và thiết lập các thông số hình ảnh. Phía bên phải là vùng biểu thị quỹ đạo chuyển động trong không gian. Phần bề mặt không gian được sử dụng từ các bản đồ, ảnh chụp hoặc hình 3D. Phần quỹ đạo được vẽ bởi đường cong với độ dày và màu sắc có thể thay đổi, trên đó thể hiện các điểm quy chiếu cho trước.

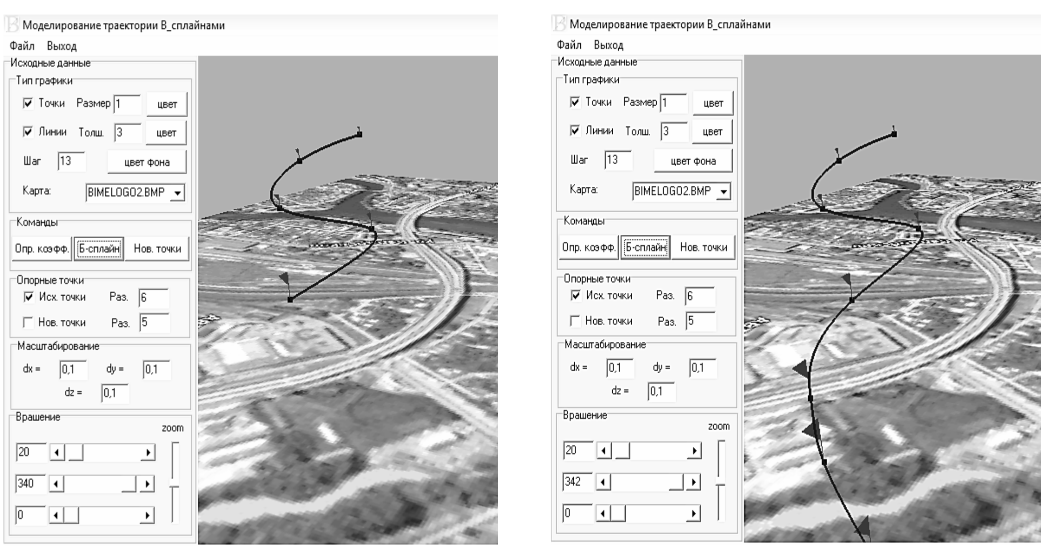
Trong quá trình thử nghiệm trên cùng một tập hợp điểm quy chiếu, khi không sử dụng thuật toán mở rộng trên thì quỹ đạo của đối tượng hầu như không đi qua các điểm quy chiếu và thời gian tính tọa độ các điểm trung gian là khá đáng kể đối với tập hợp điểm quy chiếu lớn. Với việc áp dụng thuật toán mở rộng trên quỹ đạo thu được đi qua chính xác các điểm quy chiếu cho trước và thời gian tính tọa độ các điểm trung gian được giảm đi rất nhiều.

Trên Hình 2 thể hiện quỹ đạo của đối tượng được thiết lập từ 50 điểm quy chiếu cho trước. Khi không áp dụng thuật toán mở rộng thời gian tính tọa độ các điểm trung gian là 0,752 giây và khi áp dụng thuật toán mở rộng thì thời gian đó là 0,023 giây.



Hình 2. Quỹ đạo của đối tượng thiết lập từ tập hợp 50 điểm quy chiếu cho trước khi không áp dụng thuật toán mở rộng (a) và khi áp dụng thuật toán mở rộng (b)

Trên Hình 3 thể hiện quỹ đạo của đối tượng trong không gian được thiết lập từ (5) và (8) điểm quy chiếu.



Hình 3. Quỹ đạo của đối tượng trong không gian được thiết lập từ tập hợp 5 điểm quy chiếu (a) và 8 điểm quy chiếu (b)

Hình ảnh phân tích chứng tỏ rằng phần quỹ đạo chung trên các hình (a) và (b) có dạng gần như giống hệt nhau. Điều đó chỉ ra rằng khi tăng số lượng điểm quy chiếu thì dạng của quỹ đạo hầu như không thay đổi.

6. Kết luận

Đối với việc mô tả một quỹ đạo của đối tượng động trong không gian, việc tính toán tọa độ các điểm trung gian sẽ mất rất nhiều thời gian và gặp không ít khó khăn khi số lượng các điểm lên tới hàng triệu. Với thuật toán nội suy B-spline mở rộng được đề xuất trên đảm bảo đường quỹ đạo đi qua các điểm đặc trưng cho chuyển động của đối tượng. Và bằng cách áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn giúp tăng hiệu suất tính toán lên từ 10 - 100 lần tùy theo độ dài của quỹ đạo và số lượng điểm trung gian. Quá trình thử nghiệm trên cho thấy rằng việc thay đổi số lượng các điểm quy chiếu không làm ảnh hưởng tới dạng hình học của quỹ đạo chuyển động. Thuật toán này có thể được nghiên cứu phát triển và áp dụng vào việc mô phỏng các đối tượng trong không gian ảo trong thời gian tới.

Tài liệu tham khảo

[1]. Aleksandrova N.V., Kosnikov Yu. N., Zimin A. P., Hoang Thai Ho (2015), "Blending functions in geometrical modeling and visualization of free form surfaces", *XXI century*: *the results of past and present problems. Scientific periodicals*, *Series*: *Engineering*, *Information Technology*, *Penza State Technical University*, (V1-03-25). p. 176-183.

[2]. Bibarsov A. D., Kosnikov IU. N., Vlasov V. S. (2011), "Monitoring interface of air situation for control systems ICS", *Problems of Radio Electronics*, *a series of "General engineering"*, (V1). p. 77-84.

[3]. Kosnikov Yu. N. (2005), "Application of bicubic spline in graphic system for real-time", *P. Saratov State Technical University,* (4-9), p. 30-36.

[4]. Kosnikov Yu. N., Vlasov V. S. (2012), "Geometric modeling of spatial forms in the design of ICS interface for special purpose", *Problems of Electronics*, *a series of "System information display and management of special equipment"*, (V1), p. 33-42.

[5]. Rogers D. F., Adams J. A. (1990), *Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd ed.)*, McGraw-Hill, Inc., NY, USA.

[6]. Dace Shreiner, Graham Sellers, John Krssenich, Bill Licea-Kane (2013), *OpenGL Programming Guide* (*Eighth Edition*, *The official Guide to Learning OpenGl*, *Version 4.3*). U.S. Coporate and Govornment Sales.

APPLYING THE B-SPLINE INTERPOLATION IN DESIGNING THE MOVEMENT TRAJECTORY OF A DYNAMIC OBJECT

Summary

This article presents a new method and a software for displaying the spatial trajectory of dynamic objects by applying the B-spline interpolation method on a given set of reference points. Then, for the exact passage of the B-spline curve through these points, that given set is replaced by a new reference-point set. Lastly, with the finite-difference algorithm used in computation, it increases the algorithm display speed and decreases computer resources stored.

Keywords: monitoring, trajectory, dynamic object, B-spline, interpolation, finite difference method.

Ngày nhận bài: 21/02/2017; Ngày nhận lại: 14/4/2017; Ngày duyệt đăng: 07/6/2017.