SỰ HỘI TỤ CỦA THUẬT TOÁN LAI GHÉP CHO ÁNH XẠ α-KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

• Huỳnh Diễm Ngọc(*), Nguyễn Trung Hiếu(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu hai thuật toán lai ghép và thiết lập sự hội tụ của chúng cho ánh xạ α-không giãn trong không gian Hilbert. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả chính trong [2]. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: thuật toán lai ghép, ánh xạ α-không giãn, không gian Hilbert.

1. Giới thiệu

Trong lí thuyết điểm bất động, ánh xạ không giãn và sự xấp xỉ điểm bất động của lớp ánh xạ này thu hút nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Kĩ thuật cơ bản trong xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn là xây dựng thuật toán và thiết lập sự hội tụ của chúng. Nhiều loại thuật toán đã được giới thiệu như thuật toán Picard, thuật toán Halpern, thuật toán Mann, thuật toán Krasnoselskij, thuật toán Ishikawa... Một trong những kết quả cơ bản về xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn bởi thuật toán Mann được thiết lập bởi Reich [14]. Tuy nhiên, sự hội tụ của thuật toán Mann về điểm bất động của ánh xạ không giãn trong [14] là sự hội tụ yếu. Vì vậy, nhiều tác giả đã tìm cách cải tiến thuật toán Mann để đạt được sự hội tụ mạnh cho ánh xạ không giãn. Năm 2003, Nakajo và Takahashi [13] đã giới thiệu một loại thuật toán kiểu Mann và được gọi là thuật toán lai ghép, đồng thời thiết lập được sự hội tụ mạnh cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Kể từ đó, nhiều loại thuật toán lai ghép khác được xây dựng và nhiều kết quả về sự hội tụ mạnh của những thuật toán lai ghép này cho ánh xạ không giãn được thiết lập [11], [15]. Để ý rằng, những kết quả về hội tụ mạnh này được xem là cải tiến của những kết quả về hội tụ yếu trước đó. Năm 2015, Dong và Lu [2] đã giới thiệu một thuật toán lai ghép mới mà không dựa trên thuật toán hội tụ yếu trước đó. Đồng thời, kết quả về sự hội tụ mạnh cho ánh xạ không giãn cũng đã được thiết lập. Ngoài ra, các tác giả cũng đưa ra ví dụ chứng tỏ thuật toán được đề xuất hội tụ nhanh hơn thuật toán lai ghép trong [13].

Bên cạnh việc nghiên cứu xây dựng những thuật toán mới, một số tác giả cũng quan tâm nghiên cứu mở rộng ánh xạ không giãn và nhiều lớp ánh xạ phi tuyến tổng quát hơn ánh xạ không giãn đã được giới thiệu. Năm 2008, Kohsaka và Takahashi [9] đã giới thiệu một lớp ánh xạ tổng quát của ánh xạ không giãn và được gọi là ánh xạ nonspreading. Năm 2010, Takahashi [16] đã giới thiệu một mở rộng khác của ánh xạ không giãn và được gọi là ánh xạ hybrid. Năm 2011, Aoyama và Kohsaka [1] đã giới thiệu một mở rộng của ánh xạ nonspreading và ánh xạ hybrid, chúng được gọi là ánh xạ α-không giãn. Đồng thời, một số kết quả bước đầu sự hội tụ cho ánh xạ α-không giãn trong không gian Banach cũng được các tác giả thiết lập. Kể từ đó, việc nghiên cứu sự hội tụ cho ánh xạ α-không giãn bằng những thuật toán khác nhau được một số tác giả quan tâm [10], [12]. Gần đây, nhiều thuật toán mới để xấp xỉ điểm bất động cho ánh xạ không giãn và ánh xạ không giãn suy rộng cũng như xấp xỉ nghiệm của những loại bài toán cân bằng đã được thiết lập [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu hai thuật toán lai ghép và thiết lập sự hội tụ của chúng cho ánh xạ α-không giãn trong không gian Hilbert. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả chính trong [2]. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài viết.

Định nghĩa 1.1 ([2], p.1). Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con khác rỗng trong H và $T : C \to C$ là ánh xạ. Khi đó, T được gọi là *ánh xạ không giãn* nếu $\| Tx - Ty \| \le \| x - y \|$ với mọi $x, y \in C$.

Định nghĩa 1.2 ([1], Definition 2.2). Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con khác

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

rỗng trong H, số thực $\alpha < 1$ và $T : C \to C$ là ánh xạ. Khi đó, T được gọi là *ánh xạ α-không giãn* nếu

$$\| Tx - Ty \|^2 \le \alpha \| Tx - y \|^2 + \alpha \| Ty - x \|^2 + (1 - 2\alpha) \| x - y \|^2$$

với mọi $x, y \in C$.

Nhận xét 1.3.

(1) ([1], p. 4390) *Mỗi ánh xạ không giãn là một ánh xạ 0-không giãn.*

(2) Tồn tại ánh xạ là α-không giãn nhưng không là ánh xạ không giãn [12, Example 1.6].

Kí hiệu $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $T : C \to C$. Khi T là ánh xạ α-không giãn, tập hợp $F(T)$ có tính chất sau:

Bổ đề 1.4 ([12], Lemma 3.1). *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T : C \to C$ là ánh xạ α-không giãn, $\{x_n\}$ là dãy trong C sao cho $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x và $\lim_{n \to +\infty} \| x_n - Tx_n \| = 0$. Khi đó, $x \in F(T)$.*

Bổ đề 1.5 ([12], Lemma 3.2). *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T : C \to C$ là ánh xạ α-không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Khi đó, $F(T)$ là tập lồi và đóng.*

Bổ đề 1.6 ([11], Lemma 1.1). *Cho H là không gian Hilbert thực. Khi đó*

$\| u - v \|^2 = \| u \|^2 - \| v \|^2 - 2\langle u - v, v \rangle$ *với* $u, v \in H$.

Bổ đề 1.7 ([11], Lemma 1.3). *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con khác rỗng của $H, x, y, z \in H$ và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó,*

$$D = \{v \in C : \| y - v \|^2 \le \| x - v \|^2 + \langle z, v \rangle + a\}$$

là tập lồi và đóng.

Bổ đề 1.8 ([11], p. 2403). *Cho H là một không gian Hilbert thực và C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong H. Khi đó, với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $P_C x \in C$ sao cho $\|x - P_C x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$. Ta gọi ánh xạ P_C là phép chiếu từ H lên C.*

Bổ đề 1.9 ([11], Lemma 1.4). *Cho H là một không gian Hilbert thực và C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong H. Khi đó, $z = P_C x$ nếu và chỉ nếu $\langle x - z, z - y \rangle \ge 0$ với mọi $y \in C$.*

Kí hiệu $\omega_w\{x_n\}$ là tập tất cả các điểm $x \in H$ sao cho tồn tại dãy con của $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x.

Bổ đề 1.10 ([11], Lemma 1.5). *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H, dãy $\{x_n\}$ trong H và $u \in H$. Đặt $q = P_C u$. Nếu $\{x_n\}$ là dãy sao cho $\omega_w\{x_n\} \subset C$ và thỏa mãn $\| x_n - u \| \le \| u - q \|$ với mọi n thì $\lim_{n \to +\infty} x_n = q$.*

Bổ đề 1.11 ([2], Lemma 2.5). *Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là dãy số thực không âm, $\alpha \in [0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, sao cho $a_{n+1} \le \alpha a_n + \beta b_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. Khi đó, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.*

2. Các kết quả chính

Trước hết, bằng cách thay Tx_n trong thuật toán của [2, Theorem 3.1] bởi $\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Tx_n$ và mở rộng từ ánh xạ không giãn sang ánh xạ α-không giãn, chúng tôi giới thiệu một thuật toán lai ghép và thiết lập sự hội tụ của thuật toán này cho ánh xạ α-không giãn trong không gian Hilbert.

Định lí 2.1. *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T : C \to C$ là ánh xạ α-không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Lấy $x_0, z_0 \in C$ bất kì và $C_0 = C$, xét dãy $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_n z_n + (1 - \alpha_n)[\beta_n x_n + (1 - \beta_n)Tx_n] \\ C_n = \{z \in C : \| z_{n+1} - z \|^2 \le \alpha_n \| z_n - z \|^2 + (1 - \alpha_n) \| x_n - z \|^2\} \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_n - x_0 \rangle \le 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\} \subset [0; \sigma]$, $\sigma \in [0; \frac{1}{2})$ và $0 \le \beta_n \le a < 1$. Khi đó, $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)} x_0$.

Chứng minh. Ta chứng minh theo các bước sau.

Bước 1. Chứng minh C_n và Q_n là tập lồi và đóng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Trước hết, bằng cách sử dụng Bổ đề 1.6, ta được

$$\begin{aligned}C_n &= \{z\in C: \| z_{n+1}-z\|^2 \le \alpha_n \| z_n - z\|^2 + (1-\alpha_n)\| x_n - z\|^2\}\\ &= \{z\in C: \| z_{n+1}-z\|^2 \le \| x_n - z\|^2 + \alpha_n(\| z_n - z\|^2 - \| x_n - z\|^2)\}\\ &= \{z\in C: \| z_{n+1}-z\|^2 \le \| x_n - z\|^2 + \alpha_n(\| z_n - x_n\|^2 + 2\langle z_n - x_n, x_n - z\rangle)\}\\ &= \{z\in C: \| z_{n+1}-z\|^2 \le \| x_n - z\|^2 + \langle 2\alpha_n x_n - 2\alpha_n z_n, z\rangle\\ &\quad + \alpha_n(\| z_n - x_n\|^2 + 2\langle z_n - x_n, x_n\rangle)\}.\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 1.7, ta suy ra C_n là tập lồi và đóng.

Tiếp theo, ta thấy rằng $Q_n = C \cap H_n$ trong đó $H_n = \{z \in H: \langle x_n - z, x_n - x_0\rangle \le 0\}$. Vì H_n là nửa không gian hoặc toàn bộ không gian H nên từ giả thiết của C, ta suy ra Q_n là tập lồi và đóng.

Bước 2. Chứng minh $F(T) \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Với $p \in F(T)$, ta có

$$\begin{aligned}\| z_{n+1}-p\|^2 &= \| \alpha_n z_n + (1-\alpha_n)[\beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n] - p\|^2\\ &= \| \alpha_n z_n - \alpha_n p + (1-\alpha_n)[\beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n] + \alpha_n p - p\|^2\\ &= \| \alpha_n (z_n - p) + (1-\alpha_n)[\beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n - p]\|^2\\ &\le \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\| \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n - p\|^2\\ &\quad - \alpha_n(1-\alpha_n)\| z_n - \beta_n x_n - (1-\beta_n)Tx_n\|^2\\ &\le \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\| \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n - p\|^2\\ &= \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\| \beta_n x_n - \beta_n p + (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n p - p\|^2\\ &= \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\| \beta_n (x_n - p) + (1-\beta_n)(Tx_n - p)\|^2\\ &\le \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)[\beta_n \| x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)\| Tx_n - p\|^2\\ &\quad - \beta_n(1-\beta_n)\| x_n - Tx_n\|^2]\\ &\le \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)[\beta_n \| x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)\| Tx_n - p\|^2]. \quad (2.1)\end{aligned}$$

Mặt khác, do T là ánh xạ α-không giãn nên

$$\begin{aligned}\| Tx_n - p\|^2 &= \| Tx_n - Tp\|^2\\ &\le \alpha \| Tx_n - p\|^2 + \alpha \| Tp - x_n\|^2 + (1-2\alpha)\| x_n - p\|^2\\ &= \alpha \| Tx_n - p\|^2 + (1-\alpha)\| x_n - p\|^2.\end{aligned}$$

Do đó $\| Tx_n - p\|^2 \le \| x_n - p\|^2$. Khi đó, kết hợp với (2.1) ta được

$$\begin{aligned}\| z_{n+1}-p\|^2 &\le \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)[\beta_n \| x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)\| x_n - p\|^2]\\ &= \alpha_n \| z_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\| x_n - p\|^2.\end{aligned}$$

Suy ra $p \in C_n$. Vậy $F(T) \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bước 3. Chứng minh $F(T) \subset Q_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Với $n = 0$, ta có $Q_0 = \{z \in C: \langle x_n - z, 0\rangle \le 0\} = C$. Do $F(T) \subset C$ nên $F(T) \subset Q_0$.

Giả sử $F(T) \subset Q_n$ với $n \ge 0$. Lấy $p \in F(T)$, ta chứng minh $p \in Q_{n+1}$. Theo bước 1, ta suy ra $C_n \cap Q_n$ là tập lồi và đóng. Hơn nữa, theo bước 2 và $F(T) \subset Q_n$, ta cũng có $\varnothing \ne F(T) \subset C_n \cap Q_n$. Do đó, $C_n \cap Q_n$ là tập lồi, đóng và khác rỗng. Do $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ nên theo Bổ đề 1.9, với mọi $y \in C_n \cap Q_n$, ta được

$$\langle x_0 - x_{n+1}, y - x_{n+1}\rangle \le 0 \qquad (2.2)$$

Vì $p \in F(T) \subset C_n \cap Q_n$ nên theo (2.2), ta có $\langle x_0 - x_{n+1}, p - x_{n+1}\rangle \le 0$. Suy ra $p \in Q_{n+1}$ hay $F(T) \subset Q_{n+1}$. Do đó $F(T) \subset Q_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bước 4. Chứng minh $\lim_{n\to+\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0$.

Theo Bổ đề 1.5 và giả thiết $F(T) \ne \varnothing$, ta có $F(T)$ là tập con lồi, đóng và khác rỗng của C. Theo Bổ đề 1.8 tồn tại $q \in F(T)$ sao cho $q = P_{F(T)} x_0$. Theo định nghĩa Q_n, với $z \in C$ ta có $\langle x_0 - x_n, z - x_n\rangle \le 0$ hay $x_n = P_{Q_n} x_0$. Do đó, theo Bổ đề 1.8, ta cũng có $\| x_0 - x_n\| \le \| x_0 - z\|$ với mọi $z \in Q_n$.

Vì $q \in F(T) \subset Q_n$ nên

$$\| x_0 - x_n \| \le \| x_0 - q\|. \qquad (2.3)$$

Vì $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ nên $x_{n+1} \in Q_n$. Do đó, $\langle x_n - x_{n+1}, x_n - x_0\rangle \le 0$. Suy ra $\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_0\rangle \ge 0$.

Khi đó, sử dụng Bổ đề 1.6, ta được

$$\begin{aligned}&\| x_{n+1} - x_n\|^2\\ &= \| x_{n+1} - x_0 - (x_n - x_0)\|^2\\ &= \| x_{n+1} - x_0\|^2 - \| x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_0\rangle\\ &\le \| x_{n+1} - x_0\|^2 - \| x_n - x_0\|^2. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Từ (2.3) và (2.4), ta được

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\|x_{n+1}-x_n\|^2\\ &\le\sum_{n=1}^{N}(\|x_{n+1}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2)\\ &=\|x_2-x_0\|^2-\|x_1-x_0\|^2+...+\|x_{N+1}-x_0\|^2-\|x_N-x_0\|^2\\ &=\|x_{N+1}-x_0\|^2-\|x_1-x_0\|^2\\ &\le\|q-x_0\|^2-\|x_1-x_0\|^2.\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_{n+1}-x_n\|^2$ hội tụ. Do đó $\lim_{n\to+\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0.$

Bước 5. Chứng minh $\lim_{n\to+\infty}\|z_n-x_n\|=0$ *và* $\lim_{n\to+\infty}\|z_{n+1}-x_n\|=0.$

Ta có $x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0$ nên $x_{n+1}\in C_n$. Do đó

$$\begin{aligned}&\|z_{n+1}-x_{n+1}\|^2\\ &\le\alpha_n\|z_n-x_{n+1}\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2\\ &=\alpha_n\|z_n-x_n-(x_{n+1}-x_n)\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2\\ &=\alpha_n(\|z_n-x_n\|^2+\|x_{n+1}-x_n\|^2-2\langle z_n-x_n,x_{n+1}-x_n\rangle)\\ &\quad+(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2\\ &=\alpha_n(\|z_n-x_n\|^2+\|x_{n+1}-x_n\|^2+2\langle z_n-x_n,x_n-x_{n+1}\rangle)\\ &\quad+(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}&2\langle z_n-x_n,x_n-x_{n+1}\rangle\\ &\le 2\|z_n-x_n\|.\|x_n-x_{n+1}\| \qquad (2.6)\\ &\le\|z_n-x_n\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, từ (2.5) và (2.6), ta được

$$\begin{aligned}&\|z_{n+1}-x_{n+1}\|^2\\ &\le2\alpha_n(\|z_n-x_n\|^2+\|x_{n+1}-x_n\|^2)+(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2\\ &=2\alpha_n\|z_n-x_n\|^2+(1+\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2\\ &\le2\sigma\|z_n-x_n\|^2+2\|x_n-x_{n+1}\|^2. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Vì $2\sigma\in[0,1)$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n-x_{n+1}\|^2$ hội tụ nên từ (2.7), sử dụng Bổ đề 1.11, ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\|z_n-x_n\|=0. \qquad (2.8)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}-x_n\|&=\|z_{n+1}-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n\|\\ &\le\|z_{n+1}-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-x_n\|.\end{aligned}$$

Kết hợp với $\lim_{n\to+\infty}\|z_{n+1}-x_{n+1}\|=0$ và $\lim_{n\to+\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\|z_{n+1}-x_n\|=0. \qquad (2.9)$$

Bước 6. Chứng minh $\lim_{n\to+\infty}\|Tx_n-x_n\|=0$ *và* $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}z_n=p=P_{F(T)}z_0.$

Ta có

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=\alpha_nz_n+(1-\alpha_n)[\beta_nx_n+(1-\beta_n)Tx_n]\\ &=\alpha_nz_n-\alpha_nx_n+\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)[\beta_nx_n-x_n+(1-\beta_n)Tx_n+x_n]\\ &=\alpha_n(z_n-x_n)+\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)[(1-\beta_n)(Tx_n-x_n)+x_n]\\ &=\alpha_n(z_n-x_n)+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)(Tx_n-x_n)+x_n.\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$(1-\alpha_n)(1-\beta_n)(Tx_n-x_n)=(z_{n+1}-x_n)+\alpha_n(x_n-z_n).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\|Tx_n-x_n\|\\ &\le\frac{1}{(1-\alpha_n)(1-\beta_n)}\|z_{n+1}-x_n\|+\frac{\alpha_n}{(1-\alpha_n)(1-\beta_n)}\|x_n-z_n\|\\ &\le\frac{1}{(1-\sigma)(1-a)}\|z_{n+1}-x_n\|+\frac{\sigma}{(1-\sigma)(1-a)}\|x_n-z_n\|.\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.8) và (2.9), ta được $\lim_{n\to+\infty}\|Tx_n-x_n\|=0$. Bằng cách sử dụng Bổ đề 1.4, ta có $\omega_w(x_n)\subset F(T)$. Kết hợp điều này với (2.3) và sử dụng Bổ đề 1.10, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=q. \qquad (2.10)$$

Suy ra $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$. Ta cũng có

$$\begin{aligned}\|z_n-q\|&=\|z_n-x_n+x_n-q\|\\ &\le\|z_n-x_n\|+\|x_n-q\|.\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.8) và (2.10), ta được $\lim_{n\to+\infty}\|z_n-q\|=0$ hay $\lim_{n\to+\infty}z_n=q.$ Vì vậy $\{z_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$.

Bằng cách thay đổi vai trò của x_n và z_n trong cách xác định z_{n+1} của thuật toán trong Định lí 2.1, chúng tôi giới thiệu một thuật toán lai ghép tương tự như trong Định lí 2.1 và thiết lập sự hội tụ của thuật toán này cho ánh xạ α-không giãn.

Định lí 2.2. *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T: C \to C$ là ánh xạ α-không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Lấy $x_0, z_0 \in C$ bất kì và $C_0 = C$, xét dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)[\beta_n z_n + (1-\beta_n)Tz_n] \\ C_n = \{z \in C: \| z_{n+1} - z \|^2 \leq \alpha_n \| x_n - z \|^2 + (1-\alpha_n) \| z_n - z \|^2 \} \\ Q_n = \{z \in C: \langle x_n - z, x_n - x_0 \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\} \subset [a;b]$, $a, b \in (\frac{1}{2};1)$ và $0 \leq \beta_n \leq a < 1$. Khi đó, $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$.

Chứng minh. Theo chứng minh của Định lí 2.1, ta được C_n, Q_n là tập lồi, đóng và

$$\lim_{n\to+\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0, \lim_{n\to+\infty} \| z_n - x_n \| = 0. \quad (2.11)$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \| z_{n+1} - z_n \| &= \| z_{n+1} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n + x_n - z_n \| \\ &\leq \| z_{n+1} - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x_n \| + \| x_n - z_n \|. \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.11), ta được

$$\lim_{n\to+\infty} \| z_{n+1} - z_n \| = 0. \quad (2.12)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} &\| Tz_n - z_n \| \\ &\leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(1-\beta_n)} \| z_{n+1} - z_n \| + \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_n)(1-\beta_n)} \| z_n - x_n \| \\ &\leq \frac{1}{(1-\sigma)(1-a)} \| z_{n+1} - z_n \| + \frac{\sigma}{(1-\sigma)(1-a)} \| z_n - x_n \|. \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.11) và (2.12), ta được $\lim_{n\to+\infty} \| Tz_n - z_n \| = 0$. Sử dụng Bổ đề 1.4, ta có $\omega_w(z_n) \subset F(T)$. Kết hợp điều này với (2.3) và sử dụng Bổ đề 1.10, ta có $\lim_{n\to+\infty} z_n = q$. Vậy $\{z_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$. Ta cũng có

$$\begin{aligned} \| x_n - q \| &= \| x_n - z_n + z_n - q \| \\ &\leq \| z_n - x_n \| + \| z_n - q \|. \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.11) và $\lim_{n\to+\infty} z_n = q$, ta được $\lim_{n\to+\infty} \| x_n - q \| = 0$ hay $\lim_{n\to+\infty} x_n = q$. Vì vậy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$. □

Trong Định lí 2.1 và Định lí 2.2, bằng cách chọn $\beta_n = 0$, ta được hai hệ quả sau. Các kết quả này là sự mở rộng của [2, Theorem 3.1] và [2, Theorem 3.2] cho ánh xạ α-không giãn.

Hệ quả 2.3. *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T: C \to C$ là ánh xạ α-không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Lấy x_0, $z_0 \in C$ bất kì và $C_0 = C$, xét dãy $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_n z_n + (1-\alpha_n)Tx_n \\ C_n = \{z \in C: \| z_{n+1} - z \|^2 \leq \alpha_n \| z_n - z \|^2 + (1-\alpha_n) \| x_n - z \|^2 \} \\ Q_n = \{z \in C: \langle x_n - z, x_n - x_0 \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\} \subset [0;\sigma]$, $\sigma \in [0;\frac{1}{2})$. Khi đó, $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$.

Hệ quả 2.4. *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T: C \to C$ là ánh xạ α-không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Lấy $x_0, z_0 \in C$ bất kì và $C_0 = C$, xét dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tz_n \\ C_n = \{z \in C: \| z_{n+1} - z \|^2 \leq \alpha_n \| x_n - z \|^2 + (1-\alpha_n) \| z_n - z \|^2 \} \\ Q_n = \{z \in C: \langle x_n - z, x_n - x_0 \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\} \subset [a;b]$ và $a, b \in (\frac{1}{2};1)$. Khi đó, $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}x_0$.

Vì mỗi ánh xạ không giãn là một ánh xạ *0*-không giãn nên từ Hệ quả 2.3 và Hệ quả 2.4, ta nhận được kết quả sau.

Hệ quả 2.5 ([2], Theorem 3.1). *Cho H là không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $T: C \to C$ là ánh xạ không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Lấy $x_0, z_0 \in C$ bất kì và $C_0 = C$, xét dãy $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_n z_n + (1-\alpha_n)Tx_n \\ C_n = \{z \in C: \| z_{n+1} - z \|^2 \leq \alpha_n \| z_n - z \|^2 + (1-\alpha_n) \| x_n - z \|^2 \} \\ Q_n = \{z \in C: \langle x_n - z, x_n - x_0 \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\} \subset [0;\sigma]$, $\sigma \in [0;\frac{1}{2})$. *Khi đó,* $\{x_n\}$ *và* $\{z_n\}$ *hội tụ mạnh đến* $P_{F(T)}x_0$.

Hệ quả 2.6 ([2], Theorem 3.2). *Cho* H *là không gian Hilbert thực,* C *là tập con lồi, đóng, khác rỗng của* H *và* $T: C \to C$ *là ánh xạ không giãn sao cho* $F(T) \neq \varnothing$. *Lấy* $x_0, z_0 \in C$ *bất kì và* $C_0 = C$, *xét dãy* $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ *xác định bởi*

$$\begin{cases} z_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tz_n \\ C_n = \{z \in C : \| z_{n+1} - z\|^2 \le \alpha_n \| x_n - z\|^2 + (1-\alpha_n)\| z_n - z\|^2\} \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_n - x_0\rangle \le 0\} \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

với $\{\alpha_n\} \subset [a;b]$ *và* $a, b \in (\frac{1}{2};1)$. *Khi đó,* $\{x_n\}$ *và* $\{z_n\}$ *hội tụ mạnh đến* $P_{F(T)}x_0$.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của thuật toán trong Định lí 2.1.

Ví dụ 2.7. Cho $H = \mathbb{R}$, $C = [0;4]$. Xét hai dãy $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ trong C xác định bởi:

$z_0, x_0 \in [0;4]$ bất kì,

$x_{n+1} \in \{u_n \in C_n \cap Q_n : | u_n - x_0 |$ nhỏ nhất$\}$

và

$$z_{n+1} = \begin{cases} e^{-n-1} z_n + (1-e^{-n-1})(\frac{4n+2}{n+1}), & x_n = 4 \\ e^{-n-1} z_n + (1-e^{-n-1})(\frac{n}{n+1} x_n), & x_n \neq 4 \end{cases}$$

với $n \in \mathbb{N}$, trong đó:

$C_0 = C$,

$C_n = \{z \in C : | z_{n+1} - z|^2 \le e^{-n-1} | z_n - z|^2 + (1-e^{-n-1}) | x_n - z|^2\}$

với $n \in \mathbb{N}^*$,

$Q_n = \{z \in C : (x_n - z)(x_n - x_0) \le 0\}$ với $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = 0$. Thật vậy, xét ánh xạ $T: C \to C$ được xác định bởi

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \neq 4 \\ 2, & x = 4 \end{cases}, \quad \alpha_n = e^{-n-1}, \quad \beta_n = \frac{n}{n+1}.$$

Khi đó, $0 \le \alpha_n < \frac{1}{2}$, $0 \le \beta_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, T là ánh xạ α-không giãn [12, Example 1.6] và $F(T) = \{0\} \neq \varnothing$. Như vậy $\{x_n\}, \{z_n\}$ thỏa mãn giả thiết Định lí 2.1. Do đó, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = P_{F(T)}x_0 = 0$.

Mặt khác, T không là ánh xạ không giãn nên Hệ quả 2.5 không áp dụng được cho hai dãy $\{x_n\}$, $\{z_n\}$.

Tài liệu tham khảo

[1]. K. Aoyama and F. Kohsaka (2011), "Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, (74), p. 4387-4391.

[2]. Q. Dong and Y. Lu (2015), "A new hybrid algorithm for a nonexpansive mapping", *Fixed Point Theory Appl.*, **(**2015:37), p. 1-7.

[3]. D. V. Hieu (2016), "An extension of hybrid method without extrapolation step to equilibrium problems", *J. Ind. Manag. Optim.*, p. 1-16, DOI:10.3934/jimo.2017015.

[4]. D. V. Hieu (2016), "Parallel extragradient-proximal methods for split equilibrium problems", *Math. Model. Anal.*, (21), p. 478-501.

[5]. D. V. Hieu (2017), "New subgradient extragradient methods for common solutions to equilibrium problems", *Comput. Optim. Appl.*, p. 1-24, DOI 10.1007/s10589-017-9899-4.

[6]. D. V. Hieu (2017), "Parallel hybrid methods for generalized equilibrium problems and asymptotically strictly pseudocontractive mappings", *J. Appl. Math. Comput.*, (53), p. 531-554.

[7]. D. V. Hieu, P. K. Anh, and L. D. Muu (2017), "Modified hybrid projection methods for finding common solutions to variational inequality problems", *Comput. Optim. Appl.*, (66), p. 75-96.

[8]. D. V. Hieu, L. D. Muu, and P. K. Anh (2016), "Parallel hybrid extragradient methods for pseudomonotone equilibrium problems and nonexpansive mappings", *Numer. Algorithms.*, (73), p. 197-217.

[9]. F. Kohsaka and W. Takahashi (2008), "Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces", *SIAM J. Optim.*, (19), p. 824-835.

[10]. D. Kong, L. Liu, and Y. Wu (2015), "Best proximity point theorems for α-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2015:159), p. 1-10.

[11]. C. Matinez-Yanes and H. K. Xu (2006), "Strong convergence of the CQ method for fixed point processes", *Nonlinear Anal.*, (64), p. 2400-2411.

[12]. C. Mongkolkeha, Y. J. Cho, and P. Kumam (2014), "Weak convergence theorems of iterative sequences in Hilbert spaces", *J. Nonlinear Convex Anal.*, 15(6), p. 1303-1317.

[13]. K. Nakajo and W. Takahashi (2003), "Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups", *J. Math. Anal. Appl.*, (279), p. 372-379.

[14]. S. Reich (1979), "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, (67), p. 274-276.

[15]. W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota (2008), "Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, (341), p. 276-286.

[16]. W. Takahashi (2010), "Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space", *J. Nonlinear Convex Anal.*, (11), p. 79-88.

COVERGENCE OF HYBRID ALGORITHMS FOR α-NONEXPANSIVE MAPPINGS IN HILBERT SPACES

Summary

In this paper, we introduce two hybrid algorithms and state their convergence theorems for α-nonexpansive mappings in Hilbert spaces. These results are generalizations of the main ones found in [2]. In addition, we provide illustrations for the obtained results.

Keywords: hybrid algorithm, α-nonexpansive mapping, Hilbert space.

Ngày nhận bài: 30/12/2017; Ngày nhận lại: 03/3/2017; Ngày duyệt đăng: 21/3/2017.