ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN PHI TUYẾN CÓ CHẬM CHỊU NHIỄU

• Lê Trung Hiếu(*), Nguyễn Thị Thu Hải(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ mới cho tính ổn định mũ của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian, có chậm, chịu nhiễu. Một ví dụ được đưa ra nhằm minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: *Hệ phương trình sai phân; hệ phương trình chịu nhiễu; biên ổn định; ổn định mũ.*

1. Mở đầu

1.1. Giới thiệu

Năm 1884, kể từ khi nhà toán học A. M. Lyapunov (1857-1918) công bố những công trình tiên phong của mình: *"On the stability of ellipsoidal figures of equilibrium of a rotating fluid"* (năm 1884, tiếng Nga) và *"General problem of the stability of motion"* (năm 1892, tiếng Nga), lí thuyết ổn định của các hệ động lực nói chung và lí thuyết ổn định của các hệ phương trình sai phân nói riêng đã phát triển không ngừng và đến nay đã đạt được nhiều thành tựu. Do có nhiều ứng dụng phong phú trong các mô hình toán học, cơ học, sinh học… lí thuyết ổn định của các hệ phương trình sai phân, đặc biệt là lớp hệ phương trình sai phân có chậm đã được nhiều sự quan tâm và nghiên cứu. Trong những thập niên gần đây, nhiều bài toán về các loại ổn định nghiệm khác nhau của phương trình sai phân có chậm đã được đặt ra, nghiên cứu và phát triển như ổn định Lyapunov, ổn định tiệm cận, ổn định mũ, ổn định hóa, bán kính ổn định, ổn định hữu hạn, ổn định *H*... ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]). Tuy nhiên, vì hạn chế của các phương pháp tiếp cận thông thường nên phần lớn các kết quả đạt được chủ yếu cho các phương trình dừng (time-invariant) và các điều kiện ổn định đạt được là không tường minh, khó kiểm chứng. Việc phát triển các kĩ thuật mới để nghiên cứu tìm ra các điều kiện ổn định nghiệm của các phương trình sai phân có chậm, đặc biệt là lớp các phương trình phi tuyến phụ thuộc thời gian tổng quát, là vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu sâu và hệ thống hơn ([2]).

Năm 2013, các tác giả trong [6] đã công bố ý tưởng và một phương pháp tiếp cận khác cho bài toán ổn định mũ của hệ phương trình sai phân phụ thuộc thời gian có chậm, phi tuyến tổng quát trong không gian $\mathbb{R}^n$. Trong đó, nhiều điều kiện tường minh cho tính ổn định mũ của hệ phương trình sai phân có chậm được đưa ra. Ý tưởng và phương pháp tiếp cận này sau đó được nhiều tác giả khai thác. Năm 2015, các tác giả trong [5] đã vận dụng ý tưởng và phát triển phương pháp trong [6] kết hợp với sử dụng khái niệm tích Hadamard, từ đó đưa ra nhiều điều kiện ổn định, điều kiện không ổn định (instability) của lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm. Tuy nhiên, các tác giả trong [5] chưa nghiên cứu trường hợp phương trình sai phân phụ thuộc thời gian có chậm chịu nhiễu. Do đó, trong bài báo này chúng tôi đặt vấn đề phát triển kết quả trong [5] để nghiên cứu biên ổn định của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm chịu nhiễu, đặc biệt với nhiễu là phi tuyến phụ thuộc thời gian. Các kết quả đạt được là mới và có ý nghĩa khoa học.

1.2. Kí hiệu và quy ước

Gọi $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lần lượt là vành các số nguyên, trường các số thực và trường các số phức. Gọi $\mathbb{R}^n$ là không gian véctơ thực *n* chiều và $\mathbb{Z}_+$ là tập hợp tất cả các số nguyên không âm. Với mỗi $k \in \mathbb{Z}_+$, ta kí hiệu $\underline{k} := \{1, 2, ..., k\}$ và $\underline{k}_0 := \{0, 1, 2, ..., k\}$. Với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $(k_1 < k_2)$, kí hiệu $\mathbb{Z}_{[k_1, k_2]}$ là tập hợp các số nguyên thuộc đoạn $[k_1, k_2]$. Với hai số nguyên dương *l*, *q*, kí hiệu $\mathbb{R}^{l\times q}$, $\mathbb{R}_+^{l\times q}$ lần lượt là tập hợp các ma trận

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

(**) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.

thực và tập hợp các ma trận thực không âm cỡ $l \times q$. Với hai ma trận thực $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times q}$, ta qui ước bất đẳng thức giữa $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ như sau: $A \geq (\leq, >>, <<)\ B$ tương đương với $a_{ij} \geq (\leq,\ >,\ <)\ b_{ij}$, với mọi $i \in \underline{l}, j \in \underline{q}$. Cách hiểu tương tự khi so sánh hai véctơ. Với $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times q}$ và $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, kí hiệu *trị tuyệt đối* của ma trận và véctơ bởi $|A| = (|a_{ij}|) \in \mathbb{R}^{l \times q}$ và $|x| = (|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) \in \mathbb{R}^n$. Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được hiểu là chuẩn toán tử (operator norm) và được xác định bởi $\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Cho $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, nếu $|A| \leq B$ thì $\|A\| \leq \|B\|$ ([6]). Kí hiệu θ là *véctơ không*, đồng thời cũng là *ma trận không* trong $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^{l \times q}$ ($l, q = 1, 2, ...$), tương ứng. Kí hiệu I_n là *ma trận đơn vị* trong $\mathbb{R}^{n \times n}$. Với $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *bán kính phổ* (spectral radius) của A được xác định bởi $\rho(A) = \max\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathbb{C},\ \det(\lambda I_n - A) = 0\}$.

Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ta kí hiệu $x^\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_n^\alpha)^T \in \mathbb{R}^n$. Kí hiệu "$\circ$" là *tích Hadamard* của các véctơ. Cụ thể, với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, ta có $x \circ y = (x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ ...,\ x_n y_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Một chuẩn $\|.\|$ trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là *đơn điệu* nếu $|x| \leq |y|$ kéo theo $\|x\| \leq \|y\|$. Mọi chuẩn p trên $\mathbb{R}^n$ ($\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + ...|x_n|^p\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$) và $\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,...,n} |x_i|$ là đơn điệu ([6]).

Sau đây là một số tính chất quan trọng của các ma trận không âm được sử dụng thường xuyên trong bài báo này.

Bổ đề 1.1 ([6]). *Cho ma trận $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. Khi đó,*

(i) *$\rho(A)$ là một giá trị riêng của A và tồn tại một véctơ không âm $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x \neq \theta$ sao cho $Ax = \rho(A)x$.*

(ii) *$(tI_n - A)^{-1}$ tồn tại và không âm khi và chỉ khi $t > \rho(A)$.*

Bổ đề 1.2 ([6]). *Cho ma trận $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. Các mệnh đề sau là tương đương*

(i) $\rho(A) < 1$;

(ii) $\exists p \in \mathbb{R}^n, p >> \theta : Ap << p$;

(iii) $(I_n - A)^{-1} \geq \theta$.

2. Ổn định mũ của hệ phương trình sai phân phi tuyến

Xét hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm

$$x(k+1) = F\big(k, x(k), x(k-\tau_1(k)), x(k-\tau_2(k)), ..., x(k-\tau_r(k))\big),\ k \in Z_+, \quad (1)$$

trong đó, r là số nguyên dương cho trước; $F(\cdot) : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^{n(r+1)} \to \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước sao cho $F(k, \theta, ..., \theta) = \theta$, với mọi $k \in \mathbb{Z}_+$ (tức là $v = \theta$ là một điểm cân bằng của (1)); $\tau_j(\cdot) : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, $0 \leq \tau_j(k) \leq \tau \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \underline{r}_0$.

Gọi S là tập hợp tất cả các hàm $\varphi(\cdot) : \mathbb{Z}_{[-\tau,0]} \to \mathbb{R}^n$. Với mỗi $\varphi \in S$, ta đặt $\|\varphi\| := \max\left\{\|\varphi(j)\| : j \in \mathbb{Z}_{[-\tau,0]}\right\}$. Với mỗi hàm điều kiện đầu $\varphi \in S$, (1) có duy nhất nghiệm, kí hiệu bởi $x(\cdot, \varphi)$, thỏa mãn điều kiện ([6])

$$x(j) = \varphi(j),\ j \in \mathbb{Z}_{[-\tau,0]}. \quad (2)$$

Định nghĩa 2.1 ([5]). Nghiệm không của (1) được gọi là *ổn định mũ toàn cục* (globally exponentially stable) nếu tồn tại $K > 0$ và $\beta \in [0,1)$ sao cho

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+,\ \forall \varphi \in S :\ \|x(k, \varphi)\| \leq K\beta^k \|\varphi\|.$$

Khi nghiệm không của (1) là ổn định mũ toàn cục, ta nói (1) là ổn định mũ toàn cục.

Năm 2015, các tác giả trong tài liệu [5] đã đưa ra điều kiện ổn định mũ toàn cục của (1) như sau:

Định lí 2.2 ([5, Theorem 5]). *Giả sử tồn tại $m+1$ các hàm ma trận không âm*

$A_i(\cdot): \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $i \in \underline{m}_0$ *và* $(m+1)(r+1)$ *các hàm thực vô hướng không âm* $\alpha_{ij}(k)$, $i \in \underline{m}_0, j \in \underline{r}_0, k \in \mathbb{Z}_+$ *sao cho* $\sum_{j\in \underline{r}_0} \alpha_{ij}(k) = 1$, $\forall i \in \underline{m}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ *và*

$$|F(k,u_0,u_1,...,u_r)| \le \sum_{i\in\underline{m}_0} A_i(k)\left[\underset{j\in\underline{r}_0}{\circ}|u_j|^{\alpha_{ij}(k)}\right], \forall u_j \in \mathbb{R}^n, j \in \underline{r}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nếu tồn tại $\lambda \in (0,1)$, $p \in \mathbb{R}_+, p >> \theta$ sao cho

$$\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i(k) - \lambda I_n\right)p \le \theta, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (3)$$

thì (1) *là ổn định mũ toàn cục.*

Hệ quả 2.3. *Giả sử tồn tại* $m+1$ *các ma trận không âm* $A_i \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $i \in \underline{m}_0$ *và* $(m+1)(r+1)$ *các hàm thực vô hướng không âm* $\alpha_{ij}(k)$, $i \in \underline{m}_0, j \in \underline{r}_0, k \in \mathbb{Z}_+$ *sao cho* $\sum_{j\in \underline{r}_0} \alpha_{ij}(k) = 1$, $\forall i \in \underline{m}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ *và*

$$|F(k,u_0,u_1,...,u_r)| \le \sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\left[\underset{j\in\underline{r}_0}{\circ}|u_j|^{\alpha_{ij}(k)}\right], \forall u_j \in \mathbb{R}^n, j \in \underline{r}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

Nếu $\rho\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right) < 1$ *thì* (1) *là ổn định mũ toàn cục.*

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 1.2, vì $\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i \ge \theta$ và $\rho\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right) < 1$ nên tồn tại véctơ $p \in \mathbb{R}^n, p >> \theta$ sao cho $\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right)p << p$. Từ đó, tồn tại $\lambda \in (0,1)$ sao cho $\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right)p \le \lambda p$, hay $\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i - \lambda I_n\right)p \le \theta$. Khi đó, tất cả các giả thiết của Định lí 2.2 được thỏa mãn, vậy (1) là ổn định mũ toàn cục.

Sau đây, chúng tôi áp dụng Hệ quả 2.3 để nghiên cứu bài toán ổn định của hệ phương trình sai phân phụ thuộc thời gian chịu nhiễu.

Xét hệ phương trình sai phân (1). Giả thiết rằng $\sum_{j\in\underline{r}_0} \alpha_{ij}(k) = 1, \forall i \in \underline{m}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$, (4) thỏa mãn và $\rho\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right) < 1$, khi đó theo Hệ quả 2.3 thì (1) là ổn định mũ toàn cục. Xét hệ phương trình sai phân chịu nhiễu phi tuyến có dạng sau

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F\big(k,x(k),x(k-\tau_1(k)),...,x(k-\tau_r(k))\big) \\ &\quad + G\big(k,x(k),x(k-h_1(k)),...,x(k-h_s(k))\big), \ k\in\mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó $G(\cdot): \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^{n(s+1)} \to \mathbb{R}^n$ là hàm nhiễu sao cho $G(k,\theta,...,\theta) = \theta$, với mọi $k \in \mathbb{Z}_+$ và $h_j(\cdot): \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, $0 \le h_j(k) \le h$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+, j \in \underline{r}_0$, với $h > 0$. Ngoài ra, trong suốt mục này ta giả thiết rằng

$$|G(k,u_0,u_1,...,u_s)| \le \sum_{i\in\underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\left[\underset{j\in\underline{s}_0}{\circ}|u_j|^{\beta_{ij}(k)}\right], \forall u_j \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)$$

trong đó $D_i \in \mathbb{R}_+^{n\times l_i}$, $E_i \in \mathbb{R}_+^{q_i\times n}$, $i \in \underline{v}_0$ là các ma trận đã biết; $\Delta_i \in \mathbb{R}_+^{l_i\times q_i}$, $i \in \underline{v}_0$ là những ma trận *chưa xác định* (unknown) có chứa các tham số; $\beta_{ij}(\cdot): \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$, $i \in \underline{v}_0, j \in \underline{s}_0$ là các hàm thực xác định.

Bài toán đặt ra ở đây là tìm một số thực dương γ, *được gọi là biên ổn định (stability bound) của* (5), *sao cho hệ phương trình sai phân chịu nhiễu* (5) *vẫn duy trì tính ổn định mũ toàn cục một khi độ lớn của* $(\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_v)$ *bé hơn* γ.

Định lí sau đây cho chúng ta một biên ổn định tường minh của hệ chịu nhiễu (5).

Định lí 2.4. *Giả sử tất cả các điều kiện sau đây được thỏa mãn*:

(i) $\sum_{j\in\underline{r}_0} \alpha_{ij}(k) = 1, \forall i \in \underline{m}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$; $\sum_{j\in\underline{s}_0} \beta_{ij}(k) = 1, \forall i \in \underline{v}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$;

(ii) (4) *thỏa mãn và* $\rho\left(\sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right) < 1$;

(iii) $$\|(\Delta_0,\Delta_1,...,\Delta_v)\| := \sum_{i\in\underline{v}_0}\|\Delta_i\| < \left(\max_{i,j\in\underline{v}_0}\left\|E_j\left(I_n - \sum_{i\in\underline{m}_0} A_i\right)^{-1} D_i\right\|\right)^{-1}. \quad (7)$$

Khi đó, hệ phương trình chịu nhiễu (5) *vẫn duy trì tính ổn định mũ toàn cục.*

Chứng minh. Từ (4) và (6) ta có

$$\left|F(k,u_0,u_1,...,u_r) + G(k,u'_0,u'_1,...,u'_s)\right|$$

$$\le \sum_{i\in \underline{m}_0} A_i\left[\underset{j\in \underline{r}_0}{\circ}\left|u_j\right|^{\alpha_{ij}(k)}\right]+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\left[\underset{j\in \underline{s}_0}{\circ}\left|u'_j\right|^{\beta_{ij}(k)}\right],$$

với mọi $u_i, u'_j \in \mathbb{R}^n, i\in \underline{r}_0, j\in \underline{s}_0$, với mọi $k\in \mathbb{Z}_+$. Áp dụng Hệ quả 2.3, để chứng minh (5) là ổn định mũ toàn cục ta chỉ cần chứng minh $\rho\left(\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\right)<1$. Dùng phương pháp phản chứng, giả sử ngược lại rằng $\rho\left(\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\right)\ge 1$, ta cần chỉ ra

$$\sum_{i\in \underline{v}_0}\left\|\Delta_i\right\|\ge\left(\max_{i,j\in \underline{v}_0}\left\|E_j\left(I_n-\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i\right)^{-1} D_i\right\|\right)^{-1}.$$

Đặt $t_0=\rho\left(\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\right)\ge 1$, $M=\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i$, khi đó $\rho(M)<1$. Theo Bổ đề 1.1 (ii), $\left(I_n-M\right)^{-1}$ và $\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}$ tồn tại và không âm.

Mặt khác, do $\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\ge\theta$ nên theo Bổ đề 1.1 (i) tồn tại $x\in \mathbb{R}_+^n$, $x\ne\theta$ sao cho

$$\left(\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\right)x=t_o x,$$

hay

$$\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i x=\left(t_0 I_n-M\right)x. \qquad (8)$$

Nhân hai vế của (8) với $\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}$ từ bên trái, ta có

$$\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i x=x. \qquad (9)$$

Gọi j_0 là chỉ số sao cho $\left\|E_{j_0}x\right\|=\max_{j\in \underline{m}_0}\left\|E_j x\right\|$. Khi đó, từ (9) suy ra $\left\|E_{j_0}x\right\|>0$ (tức là $\left\|E_{j_0}x\right\|\ne 0$). Nhân hai vế của (9) với E_{j_0} từ bên trái, ta có

$$E_{j_0}\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i x=E_{j_0}x.$$

Lấy chuẩn hai vế của đẳng thức trên và áp dụng tính chất chuẩn của tích hai ma trận (hoặc hai véctơ, hoặc ma trận và véctơ) không vượt quá tích của các chuẩn của hai ma trận (hoặc hai véctơ, hoặc ma trận và véctơ, tương ứng) đó ([2]), ta có

$$\sum_{i\in \underline{v}_0}\left\|E_{j_0}\left(t_0 I_n-M\right)^{-1} D_i\right\|\left\|\Delta_i\right\|\left\|E_i x\right\|\ge\left\|E_{j_0}x\right\|.$$

Điều này suy ra

$$\max_{i,j\in \underline{v}_0}\left\|E_j\left(t_0 I_n-M\right)^{-1} D_i\right\|\left(\sum_{i\in \underline{v}_0}\left\|\Delta_i\right\|\right)\left\|E_{j_0}x\right\|\ge\left\|E_{j_0}x\right\|.$$

Vì $\max_{i,j\in \underline{v}_0}\left\|E_j\left(I_n-M\right)^{-1} D_i\right\|\ne 0$ nên

$$\sum\left\|\Delta_i\right\|\ge\left(\max_{i,j\in \underline{v}_0}\left\|E_j\left(I_n-M\right)^{-1} D_i\right\|\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Mặt khác, ta có

$$\left(I_n-M\right)^{-1}-\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}=\left(t_0-1\right)\left(I_n-M\right)^{-1}\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}\ge\theta$$

do đó $\left(I_n-M\right)^{-1}\ge\left(t_0 I_n-M\right)^{-1}$. Suy ra $E_j\left(I_n-M\right)^{-1} D_i\ge E_j\left(t_0 I_n-M\right)^{-1} D_i$. Khi đó,

$$\left\|E_j\left(I_n-M\right)^{-1} D_i\right\|\ge\left\|E_j\left(t_0 I_n-M\right)^{-1} D_i\right\|,\ \forall i,j\in \underline{v}_0. \qquad (11)$$

Từ (10), (11) suy ra

$$\sum_{i\in \underline{v}_0}\left\|\Delta_i\right\|\ge\left(\max_{i,j\in \underline{v}_0}\left\|E_j\left(I_n-\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i\right)^{-1} D_i\right\|\right)^{-1}.$$

Điều này mâu thuẫn với (7). Do đó, ta có $\rho\left(\sum_{i\in \underline{m}_0} A_i+\sum_{i\in \underline{v}_0} D_i\Delta_i E_i\right)<1$. Suy ra điều phải chứng minh. □

Chúng tôi đưa ra một ví dụ để minh họa cho Hệ quả 2.3 và Định lí 2.4.

Ví dụ 2.5. Xét hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm trong $\mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$x(k+1)=F\left(k,x(k),x\left(k-\tau_1(k)\right)\right),\ k\in \mathbb{Z}_+, \qquad (12)$$

trong đó, $\tau_1(\cdot):\ \mathbb{Z}_+\to \mathbb{Z}_+$ là hàm bị chặn và

$$F(k,x_0,x_1):=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}x_{01}^{\frac{1}{2}}x_{11}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}x_{02}^{\frac{1}{2}}x_{12}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}x_{02}^{\frac{1}{3}}x_{12}^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}x_{01}^{\frac{1}{4}}x_{11}^{\frac{3}{4}}\\ \frac{1}{8}x_{01}^{\frac{1}{2}}x_{11}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x_{01}^{\frac{1}{3}}x_{11}^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x_{02}^{\frac{1}{3}}x_{12}^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{8}x_{01}^{\frac{1}{4}}x_{11}^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{6}x_{02}^{\frac{1}{4}}x_{12}^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix},$$

$k\in \mathbb{Z}_+$, với $x_i=\left(x_{i1},x_{i2}\right)^T\in \mathbb{R}^2$, $i=0,1$.

Khi đó, ta có

$$\left|F(k,x_0,x_1)\right| \le A_0\left(|x_0|^{\frac{1}{2}}\circ|x_1|^{\frac{1}{2}}\right)+A_1\left(|x_0|^{\frac{1}{3}}\circ|x_1|^{\frac{2}{3}}\right)+A_2\left(|x_0|^{\frac{1}{4}}\circ|x_1|^{\frac{3}{4}}\right),$$

với mọi $k\in\mathbb{Z}_+$, $x_0,x_1\in\mathbb{R}^2$. Trong đó các ma trận A_0, A_1, A_2 được xác định bởi

$$A_0 := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}, A_1 := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Đặt $M = A_1 + A_2 + A_3$, ta có

$\rho(M) = \rho\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{7+\sqrt{19}}{12} < 1.$ Khi đó theo Hệ quả 2.3 thì (12) là ổn định mũ toàn cục.

Tiếp theo, xét hệ phương trình sai phân chịu nhiễu như sau

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F\big(k, x(k), x(k-\tau_1(k))\big) \\ &\quad + G\big(k, x(k), x(k-h_1(k)), x(k-h_2(k))\big), \quad (13) \end{aligned}$$

trong đó, $k\in\mathbb{Z}_+$, $h_j(\cdot):\ \mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$ là hàm bị chặn và G được xác định bởi

$$G(k,y_0,y_1,y_2) := \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{10}c+\frac{3}{20}d\right) y_{01}^{\frac{1}{4}} y_{11}^{\frac{1}{4}} y_{21}^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{3}{50}c+\frac{3}{50}d\right) y_{02}^{\frac{1}{4}} y_{12}^{\frac{1}{4}} y_{22}^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{25}e\, y_{01}^{\frac{1}{5}} y_{11}^{\frac{2}{5}} y_{21}^{\frac{2}{5}} \\ -\left(\frac{3}{10}e+\frac{7}{50}f\right) y_{02}^{\frac{1}{5}} y_{12}^{\frac{2}{5}} y_{22}^{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{50}b\, y_{01}^{\frac{1}{3}} y_{11}^{\frac{1}{3}} y_{21}^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{3}{100}a+\frac{3}{100}b\right) y_{02}^{\frac{1}{3}} y_{12}^{\frac{1}{3}} y_{22}^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{8}c+\frac{1}{16}d\right) y_{01}^{\frac{1}{4}} y_{11}^{\frac{1}{4}} y_{21}^{\frac{1}{2}} \\ -\left(\frac{1}{40}c+\frac{1}{40}d\right) y_{02}^{\frac{1}{4}} y_{12}^{\frac{1}{4}} y_{22}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

trong đó $k\in\mathbb{Z}_+$, $y_i=(y_{i1},y_{i2})^T\in\mathbb{R}^2$, $i=0,1,2$ và a, b, c, d, e, f là các tham số thực.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \left|G(k,y_0,y_1,y_2)\right| &\le D_0\Delta_0E_0\left(|y_0|^{\frac{1}{3}}\circ|y_1|^{\frac{1}{3}}\circ|y_2|^{\frac{1}{3}}\right)+D_1\Delta_1E_1\left(|y_0|^{\frac{1}{4}}\circ|y_1|^{\frac{1}{4}}\circ|y_2|^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + D_2\Delta_2E_2\left(|y_0|^{\frac{1}{5}}\circ|y_1|^{\frac{2}{5}}\circ|y_2|^{\frac{2}{5}}\right), \forall k\in\mathbb{Z}_+, \forall y_0,y_1,y_2\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Trong đó

$$D_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \ \Delta_0 := \begin{pmatrix} |a| & |b| \end{pmatrix}, \ E_0 := \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix},$$

$$D_1 := \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ \Delta_1 := \begin{pmatrix} |c| & |d| \end{pmatrix}, \ E_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$D_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Delta_2 := \begin{pmatrix} |e| & |f| \end{pmatrix}, \ E_2 := \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Áp dụng Định lí 2.4, ta có (13) vẫn duy trì tính ổn định mũ toàn cục nếu

$$\|\Delta_0\|+\|\Delta_1\|+\|\Delta_2\| < \frac{1}{\max\limits_{i,j\in\{0,1,2\}}\left\|E_j(I-M)^{-1}D_i\right\|}. \quad (14)$$

Ta có

$$E_0(I_2-M)^{-1}D_0 = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix},$$

$$E_0(I_2-M)^{-1}D_1 = \begin{pmatrix} \frac{153}{50} \\ \frac{108}{25} \end{pmatrix},$$

$$E_0(I_2-M)^{-1}D_2 = \begin{pmatrix} \frac{18}{25} \\ \frac{26}{25} \end{pmatrix},$$

$$E_1(I_2-M)^{-1}D_0 = \begin{pmatrix} \frac{21}{50} \\ \frac{27}{100} \end{pmatrix},$$

$$E_1(I_2-M)^{-1}D_1 = \begin{pmatrix} 4.17 \\ 2.595 \end{pmatrix},$$

$$E_1(I_2-M)^{-1}D_2 = \begin{pmatrix} \frac{26}{25} \\ \frac{16}{25} \end{pmatrix},$$

$$E_2(I_2-M)^{-1}D_0 = \begin{pmatrix} \frac{21}{50} \\ \frac{21}{25} \end{pmatrix},$$

$$E_2\left(I_2-M\right)^{-1}D_1=\begin{pmatrix}4.05\\ \dfrac{357}{50}\end{pmatrix},$$

$$E_2\left(I_2-M\right)^{-1}D_2=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{42}{25}\end{pmatrix}.$$

Giả sử $\mathbb{R}^2$ được trang bị chuẩn $p=2$. Khi đó, (14) trở thành

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+f^2}<\frac{1}{\sqrt{\left(4.05\right)^2+\left(\dfrac{357}{50}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{67.3821}}. \quad (15)$$

Vậy nếu các tham số *a, b, c, d, e, f* thỏa mãn (15) thì (13) vẫn duy trì tính ổn định mũ toàn cục.

3. Kết luận

Với ý tưởng và cách tiếp cận khác, chúng tôi đã đưa ra một vài điều kiện tường minh mới cho tính ổn định nghiệm của hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm, chịu nhiễu phi tuyến. Các kết quả thu được là mới và có ý nghĩa khoa học, góp phần làm phong phú thêm tiêu chuẩn ổn định nghiệm của lớp hệ phương trình sai phân có chậm, phụ thuộc thời gian.

Hướng phát triển của vấn đề nghiên cứu là khai thác, phát triển kĩ thuật đã có trong bài báo để nghiên cứu tính chất tương tự đối với lớp hệ phương trình sai phân ngẫu nhiên có chậm, hệ phương trình sai phân có chậm với biến liên tục.

Tài liệu tham khảo

[1]. M. Buslowicz (2008), "Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences,* (56), p. 325-328.

[2]. Lê Trung Hiếu (2015), *Về tính ổn định một số lớp của phương trình sai phân,* Luận án tiến sĩ, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

[3]. D. Hinrichsen, N.K. Son, P. H. A. Ngoc (2003), "Stability radii of positive higher order difference systems", *Systems & Control Letters*, (49), p. 377-388.

[4]. E. Liz (2011), "Stability of non-autonomous difference equations: simple ideas leading to useful results", *Journal of Difference Equations and Applications*, (17), p. 203-220.

[5]. P. T. Nam, V. N. Phat, P. N. Pathirana, H. Trinh (2016), "Stability analysis of general family of nonlinear positive discrete time-delay systems", *International Journal of Control*, (89.7), p. 1303-1315.

[6]. P. H. A. Ngoc, L. T. Hieu (2013), "New criteria for exponential stability of nonlinear difference systems with time-varying delay", *International Journal of Control***,** 86 (9), p. 1646-1651.

[7]. S. Udpin, P. Niamsup (2009), "New discrete type inequalities and global stability of nonlinear difference equations", *Applied Mathematics Letters*, (22), p. 856-859.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR SOLUTION STABILITY OF NONLINEAR TIME-VARYING PERTURBED DIFFERENCE SYSTEMS WITH DELAYS

Summary

In this paper, we generate new sufficient conditions for exponential stability of nonlinear perturbed time-varying difference systems with delays. An example is provided to illustrate the obtained results.

Keywords: Difference systems; perturbed systems; stability bound; exponential stability.

Ngày nhận bài: 01/12/2016; Ngày nhận lại: 01/03/2017; Ngày duyệt đăng: 21/03/2017.