NGHIÊN CỨU NGHIỆM ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CÓ HỆ SỐ TUẦN HOÀN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHỔ

• Nguyễn Việt Khoa(*)

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi xét một hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn không ô-tô-nôm dạng:

$$\dot{x} = A(t)x;\ x(0,\varepsilon) = x_0, \qquad (1)$$

trong đó $x \in \mathbb{C}^n$; $A(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$; ε *- tham số nhỏ;* $A_k(t)$ *là các ma trận vuông trơn tuần hoàn có chu kỳ T;* $t \in [0;+\infty)$. *Nghiên cứu và kiến thiết phương pháp đưa hệ đang xét về dạng một hệ phương trình vi phân với ma trận các hệ số gần như hằng số. Từ đó dùng phương pháp phổ và định lý Lyapunov để nghiên cứu về nghiệm ổn định tiệm cận của hệ phương trình đã cho.*

Từ khóa: Nghiệm ổn định tiệm cận; Phương pháp phổ; Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn; Phương pháp tách.

1. Mở đầu

Xét hệ phương trình vi phân:

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y,t) \qquad (2)$$

$$\left(y(t_0) = y_0;\ y \in \mathbb{C}^n;\ t \ge t_0\right).$$

Định nghĩa 1.1. Nghiệm $\varphi(t)$ của hệ (2) được gọi là *ổn định* (theo nghĩa Lyapunov) nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho đối với nghiệm $y(t)$ bất kỳ của hệ đó mà có giá trị ban đầu thỏa mãn:

$$\left\| y(t_0) - \varphi(t_0) \right\| < \delta(\varepsilon) \qquad (3)$$

thì $\forall t \ge t_0$ sẽ là nghiệm đúng của bất đẳng thức:

$$\left\| y(t) - \varphi(t) \right\| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Định nghĩa 1.2. Nghiệm $\varphi(t)$ của hệ (2) được gọi là *ổn định tiệm cận* (theo nghĩa Lyapunov) nếu như cả hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:

i/ Nghiệm $\varphi(t)$ là *ổn định*.

ii/ $\lim_{t\to+\infty} \left\| y(t) - \varphi(t) \right\| = 0$, $\forall y(t)$ thỏa mãn (3) tại $t = t_0$.

Nhận xét 1.3. Bằng cách đổi biến $x(t) = y(t) - \varphi(t)$, thì từ hệ (2) ta được:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} + \Phi(x + \varphi(t), t) \equiv f(x,t), \qquad (5)$$

$$\left(f(0,t) = 0;\ t \ge t_0\right).$$

Như vậy, việc khảo sát sự ổn định của nghiệm $\varphi(t)$ của hệ (2) được quy về việc khảo sát sự ổn định của nghiệm $x(t) = 0$ của hệ (5).

Sau đây là một số kí hiệu được dùng trong bài báo:

$\overline{A} = diag\{a_{11},...,a_{nn}\}$; $\overline{\overline{A}} = A - \overline{A}$, với $A = \{a_{jk}\}$ là ma trận vuông cấp n; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$;

A^* - ma trận Hermite (là chuyển vị của ma trận có phần tử liên hợp với phần tử của A);

Phổ $\{\lambda_{0j};\ j = \overline{1,n}\}$ của ma trận vuông A_0 là tập các giá trị riêng của ma trận đó.

2. Nội dung chính

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không ô-tô-nôm dạng:

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)x;\ x(0,\varepsilon) = x_0; \qquad (6)$$

$$\left(x \in \mathbb{C}^n;\ t \ge 0\right).$$

Trong đó chuỗi ma trận $A(t,\varepsilon) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$ hội tụ tuyệt đối đều theo t và ε, với tham số ε - đủ nhỏ; A_0 là ma trận hằng số; các ma trận $A_k(t)$ $(k \ge 1)$ là các ma trận vuông tuần hoàn có chu kỳ T; $t \in [0;+\infty)$.

(*) Trường Cao đẳng Sư phạm Kiên Giang.

Định lý 2.1. *Nếu ma trận A_0 có phổ là $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ thỏa mãn điều kiện:*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i2\pi q T^{-1}; \quad (7)$$

$$\left(j \neq k;\ j,k = \overline{1,n};\ q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,...\right)$$

thì với ε đủ nhỏ, phép biến đổi không suy biến tuần hoàn chu kỳ T:

$$x = S_0 H_{(N)}(t,\varepsilon) z; \quad (8)$$

$$(H_{(N)}(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\varepsilon^k;$$

$$S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = diag\{\lambda_{01},...,\lambda_{0n}\}),$$

sẽ biến đổi hệ (6) tương đương với hệ phương trình sau đây:

$$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z;\ z(0,\varepsilon) = z_0;$$

$$Q(t,\varepsilon) = \Lambda_{(N)}(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1} G_{(N+1)}(t,\varepsilon); \left\| G_{(N+1)}(t,\varepsilon) \right\| \leq C; t \geq 0; \quad (9)$$

$$\Lambda_{(N)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k \varepsilon^k = diag\{\lambda_1(\varepsilon),...,\lambda_n(\varepsilon)\},$$

trong đó Λ_k là ma trận chéo hằng số; $H_k(t)$ là các ma trận tuần hoàn chu kỳ T.

***Chứng minh*:**

Theo giả thiết ban đầu của định lý thì luôn tồn tại [2], [6] phép biến đổi không suy biến $x = S_0 y$, đưa hệ (6) về dạng đơn giản hơn:

$$\dot{y} = B(t,\varepsilon) y;\ y(0,\varepsilon) = y_0; \quad (10)$$

$$\left(B(t,\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\varepsilon^k \right).$$

Sau đó với ε - đủ nhỏ, phép biến đổi tuần hoàn chu kỳ *T*, không suy biến $y = H_{(N)}(t,\varepsilon) z$, sẽ biến đổi hệ (10) về dạng (9) đang cần.

Nếu các ma trận $B(t,\varepsilon)$, $H_{(N)}(t,\varepsilon)$ và $Q(t,\varepsilon)$ thỏa mãn phương trình vi phân ma trận:

$$\dot{H}_{(N)} = B(t,\varepsilon) H_{(N)}(t,\varepsilon) - H_{(N)}(t,\varepsilon) Q(t,\varepsilon) \quad (11)$$

thì bằng phép biến đổi và đồng nhất các hệ số của ε^k, $k = \overline{1,N}$ ta được:

$$\dot{H}_k = P_k(t) - \Lambda_k + \Lambda_0 H_k(t) - H_k(t)\Lambda_0; \quad (12)$$

$$P_1(t) = B_1(t);$$

$$P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(B_j(t) H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\Lambda_j \right), k = \overline{2,N}.$$

Sau đó dùng phương pháp tách "phần đường chéo", ta được phương trình ma trận đường chéo:

$$\dot{\overline{H}}_k = \overline{P}_k(t) - \Lambda_k,\ k = \overline{1,N} \quad (13)$$

và phương trình ma trận "đường chéo không" (Tức là các hệ số trên đường chéo chính bằng 0).

$$\dot{\overline{\overline{H}}}_k = \Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k(t) - \overline{\overline{H}}_k(t)\Lambda_0 + \overline{\overline{P}}_k(t); \quad (14)$$

$$\overline{\overline{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\};\ \overline{\overline{P}}_k(t) = \{p_{ijk}(t)\};\ k = \overline{1,N}.$$

Mỗi một hệ phương trình dạng (13) có một lớp nghiệm tuần hoàn chu kỳ *T* duy nhất:

$$\overline{H}_k(t) = \int_0^t \left(\overline{P}_k(s) - \Lambda_k \right) ds, \text{ nếu } \Lambda_k = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{P}_k(t)\,dt, k = \overline{1,N}.$$

Cũng như vậy, mỗi một hệ phương trình dạng (14), được tách ra thành $(n^2 - n)$ phương trình vi phân vô hướng bậc nhất dạng:

$$\dot{h}_{ijk}(t) = \sigma_{ij} h_{ijk} + p_{ijk}(t); \quad (15)$$

$$\left(i \neq j;\ i,j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,N}\right).$$

Theo điều kiện của Định lý 1.1, thì phương trình (15) tồn tại duy nhất nghiệm tuần hoàn chu kỳ *T* [1, tr. 361] có dạng:

$$h_{ijk}(t) = e^{\sigma_{ij}(t+T)} \left(1 - e^{\sigma_{ij}T}\right)^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\sigma_{ij}s} p_{ijk}(s)\,ds. \quad (16)$$

Việc chứng minh $\left\| G_{(N+1)}(t,\varepsilon) \right\| \leq C$ với tham số ε - đủ nhỏ, được suy ra bằng cách đồng nhất các hệ số của ε^{N+1} ở hai vế của phương trình (11).

$$G_{(N+1)}(t,\varepsilon) = \left(B_1(t)H_N(t) + ... + B_N(t)H_1(t)\right) + \tilde{B}_{N+1}(t,\varepsilon) - \left(H_1(t)\Lambda_N + ... + H_N(t)\Lambda_1\right).$$

Định lý 1.1 đã được chứng minh.

Bổ đề 2.2. *Chuẩn Euclid của nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không ô-tô-nôm $\dot{x} = A(t)x$ luôn thỏa mãn phương trình vi phân:*

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = 2\,\mathrm{Re}\left(x^* A(t) x\right). \quad (17)$$

***Chứng minh*:**

Theo định nghĩa Chuẩn Euclid ta có $\|x\|^2 = x^* x = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2;\ \dot{x}^* = x^* A^*(t).$

Từ đó suy ra

$$\frac{d\|x\|^2}{dt} = \dot{x}^* x + x^* \dot{x} = x^* A^*(t) x + x^* A(t) x = 2\operatorname{Re}\left(x^* A(t) x\right).$$

Bổ đề được chứng minh.

Định lý 2.3. *Với các giả thiết của Định lý 1.1, nếu phổ* $\left\{\lambda_j(\varepsilon);\, j=\overline{1,n}\right\}$ *của ma trận* $\Lambda_{(N)}(\varepsilon)$ *trong hệ phương trình (9) thỏa mãn điều kiện:*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\varepsilon) \le -\sigma_0\varepsilon^q < 0; \quad \left(j=\overline{1,n};\ q=\overline{0,N}\right) \tag{18}$$

thì nghiệm tầm thường của hệ phương trình (9) là ổn định tiệm cận.

***Chứng minh*:**

Áp dụng Bổ đề 2.2 vào hệ (9), ta có:

$$\frac{1}{2}\frac{d\|z\|^2}{dt} = \operatorname{Re}\left(z^*\Lambda_{(N)}(\varepsilon)z\right) + \varepsilon^{N+1}\operatorname{Re}\left(z^* G_{(N+1)}(t,\varepsilon)z\right) \le \left(-\sigma_0\varepsilon^q\|z\|^2 + \varepsilon^{N+1}C_1\|z\|^2\right) = \left(-\sigma_0\varepsilon^q + C_1\varepsilon^{N+1}\right)\|z\|^2 \le \left(-\sigma_1\varepsilon^q\right)\|z\|^2;\ \left(0<\sigma_1<\sigma_0\right).$$

Từ đó suy ra: $\|z(t)\| \le \|z_0\|\exp\left(-\sigma_1\varepsilon^q t\right) \to 0$, $(t \to +\infty)$. Điều này chứng tỏ rằng nghiệm tầm thường của hệ (9) là ổn định tiệm cận. Định lý 2.3 đã được chứng minh.

Nhận xét 2.4. Hệ phương trình (9) là tương đương với hệ (6), vì vậy nghiệm tầm thường của hệ (6) cũng ổn định tiệm cận.

Ví dụ 2.5. Phép quay dừng của con quay hồi chuyển trong vật lý, được mô tả bằng hệ phương trình vi phân tuyến tính sau đây [9]:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1(t)\right)x;\ \left(x \in \mathbb{C}^2\right); \tag{19}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} -p(t) & -r(t) \\ p(t) & r(t) \end{pmatrix};$$

$$p(t) = (1-\chi)\Omega\sin^2\omega t + 0,5i\omega(\xi-1)\sin 2\omega t;$$

$$r(t) = p(t) - \Omega\sin^2\omega t;\ \chi = I_1/I_3;\ \xi = \alpha_3/\alpha_1;$$

$$\varepsilon = \alpha_1 H_0^2 / L > 0;\ \Omega = L/I_1.$$

Trong đó: ω là tần số dao động của từ trường; H_0 là biên độ dao động của từ trường; Ω là tần số chương động trong dao động của vật thể; I_j là mô men quán tính quanh mỗi trục của nó $(j=1,2,3)$; L là mô men động lượng; ξ là đại lượng được xác định bởi các phân cực của vật thể tương đối so với trục của nó; $\varepsilon > 0$ là tham số rất nhỏ.

Trong trường hợp không cộng hưởng ($\Omega \ne 2\omega$). Phép biến đổi tuần hoàn chu kỳ T $(T = \pi/\omega)$:

$$x = H(t,\varepsilon)y \tag{20}$$

$$H(t,\varepsilon) = E + \varepsilon H_1(t)$$

vào hệ (19), ta được:

$$\dot{y} = \left(\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + 0\left(\varepsilon^2\right)\right)y, \tag{21}$$

$$\Lambda_0 = A_0;\ \Lambda_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{A}_1(t)dt = \frac{\Omega}{2I_3}\begin{pmatrix} I_1 - I_3 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix}.$$

Cấu trúc phổ của ma trận Λ_0 ($\lambda_{01} = i\Omega$ và $\lambda_{02} = 0$) và ma trận $\Lambda_1 = diag\left\{\lambda_{11}, \lambda_{12}\right\}$, $\left(\lambda_{11} = \dfrac{\Omega}{2I_3}(I_1 - I_3);\ \lambda_{12} = -\Omega I_1/2I_3\right)$ cho phép ta kết luận rằng, chuyển động dừng đang xét ở trên là tiệm cận ổn định khi $I_3 > I_1$.

3. Kết luận

Nhờ phép biến đổi không suy biến $x = S_0 H_{(N)}(t,\varepsilon)z$ (với ε - đủ nhỏ), ta đưa hệ phương trình tuyến tính không ô-tô-nôm đã cho dạng (6) về dạng hệ phương trình tuyến tính với ma trận các hệ số gần như đường chéo và là các hằng số (9). Đây là kết quả cần thiết và thuận lợi để nghiên cứu nghiệm ổn định tiệm cận. Từ đó nhờ Định lý về nghiệm ổn định tiệm cận (Lyapunov [5]), ta có thể kết luận được điều kiện để nghiệm của hệ (9) khi nào là ổn định tiệm cận.

Tài liệu tham khảo

[1]. Вазов В (1968), *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений,* М.: МИР. Москва, РФ.

[2]. Воеводин В.В (1974), *Линейная алгебра*, М.: Наука, Москва, РФ.

[3]. Гребеников. Е.А (1986), *Метод усреднения в прикладных задачах,* М.: Наука, Москва, РФ.

[4]. Hoàng Hữu Đường (1977), *Lý thuyết phương trình vi phân*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội.

[5]. Демидович Б.П (1998), *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, Изд-во МГУ, Москва, РФ.

[6]. Ланкастер П (1978), *Теория матриц,* М.: Наука, Москва, РФ.

[7]. Коняев. Ю. А (2001), "О некоторых методах исследования устойчивости", *Математический сборник*, 192 (3), С. 65-82.

[8]. Коняев. Ю. А (1993), "Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений", *Математический сборник*, 184 (12), С. 33-144.

[9]. Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г (1987), "Об устойчивости стационарных вращений симметричного твердого тела в переменном магниттом поле", *Прикладная математика и механика,* 51 (3), С. 375-381.

[10]. Нгуен Вьет Хоа (2013), "Аналитические методы исследования устойчивости линейных и квазилинейных систем с полиномиально периодической матрицей", *Вестник РУДН, серия: Математика. Информатика. Физика,* (4), С. 18-23.

INVESTIGATING ASYMPTOTICALLY STABLE SOLUTIONS OF THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH PERIODIC COEFFICIENTS BY SPECTRAL METHOD

Summary

In this article, we examine a linear differential equation system with periodically coefficients non-autonomous form as follows:

$$\dot{x} = A(t)x;\ \ x(0,\varepsilon) = x_0,$$

where $x \in \mathbb{C}^n$; $A(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$; ε - small parameter; $A_k(t)$ are rather smooth T- $t \in [0;+\infty)$. We come up with the method of making the current system become the new one with a matrix of almost constant coefficients. Thereby, we use the spectral method and the Lyapunov theorem to study asymptotic stable solutions of the given equation system.

Keywords: asymptotically stable solution, spectral method, linear differential systems with periodic coefficients, splitting method.

Ngày nhận bài: 20/12/2016; Ngày nhận lại: 10/4/2017; Ngày duyệt đăng: 07/6/2017.