ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ THEO DÃY CHO NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VỚI RÀNG BUỘC NHÚNG

• Nguyễn Kim Ngân(*), Võ Đức Thịnh(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng điều kiện cần và đủ theo dãy cho nghiệm của bài toán tối ưu với ràng buộc nhúng. Các điều kiện tối ưu theo dãy đạt được trong bài báo này không cần kèm theo một ràng buộc chính qui.

Từ khóa: dãy, nghiệm của bài toán tối ưu, ràng buộc nhúng.

1. Giới thiệu

Trong Lí thuyết tối ưu, để đặc trưng điều kiện cần cho nghiệm của một bài toán tối ưu thường phải kèm theo một điều kiện chính qui nào đó [3], [4], [5], [9]. Các điều kiện chính qui thường gặp là điều kiện chính qui Slater, ACQ, BCQ, FMCQ... Năm 1982, Borwein và cộng sự [1] đã đặc trưng điều kiện tối ưu cho một lớp bài toán tối ưu mà không cần điều kiện chính qui kèm theo. Năm 1997, L. Thibault [10] đã xây dựng điều kiện cần và đủ cho nghiệm của một lớp bài toán tối ưu bằng nhân tử Lagrange. Kết quả là tồn tại dãy nhân tử Lagrange mà không cần ràng buộc chính qui. Cũng cùng ý tưởng như thế, V. Jeyakumar và cộng sự [7] xét bài toán

$$\min f(x) \text{ sao cho } g(x) \in -S, \qquad (\mathrm{P}^*)$$

trong đó X là không gian Banach phản xạ, Z là không gian lồi địa phương, S là nón lồi đóng trong Z mà không cần nó có phần trong khác rỗng, $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm lồi liên tục và hàm $g : X \to Z$ là hàm S-lồi liên tục. Sau đó, các tác giả đã xây dựng dãy nhân tử Lagrange của Bài toán (P^*) mà không cần ràng buộc chính qui. Từ đó các tác giả giới thiệu một số kết quả trong một số trường hợp đặc biệt.

Trong bài viết này, dựa vào tài liệu [7], chúng tôi bước đầu xây dựng điều kiện cần và đủ theo dãy cho nghiệm của bài toán tối ưu có ràng buộc nhúng như sau.

$$\min f(x) \qquad (\mathrm{P})$$

$$\text{sao cho } x \in \Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) := (g_1(x),...,g_m(x)) \in \tau\},$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $g_j : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1,...,m$ là các hàm lồi chính thường, nửa liên tục dưới và

$$\tau := \{y \in \mathbb{R}^m \mid a_i^T y \le b_i, i = 1,..., p\}.$$

Trong trường hợp $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1,...,m$, f, g_j là hàm lồi, liên tục với mọi $j = 1,...,m$. Bài toán (P) sẽ là một trường hợp đặc biệt của bài toán trong [7].

2. Các kết quả bổ trợ

Trong bài báo này, chúng tôi kí hiệu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ và quy ước:

$$0 \times \pm\infty = \pm\infty \times 0 = 0,$$
$$+\infty + (-\infty) = +\infty - (+\infty) = +\infty$$
$$+\infty \times (-\infty) = -\infty \times (+\infty) = -\infty.$$

Chúng tôi viết là $x \le y$ nếu $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, $y = (y_1, y_2,..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ khác rỗng và $x_i \le y_i$ với mọi $i = 1,...,n$. Cho K là một nón lồi đóng trong $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu $K^+ := \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid x^{*T} x \ge 0, \forall x \in K\}$.

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. *Tập xác định* của hàm f, kí hiệu là dom$f$, được định nghĩa bởi

$$\mathrm{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}.$$

Phần trên của đồ thị f, kí hiệu là epi$f$, được định nghĩa bởi

$$\mathrm{epi} f := \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom} f, r \ge f(x)\}.$$

Hàm f được gọi là *lồi* trên $\mathbb{R}^n$ nếu với mọi $x, y \in \mathrm{dom} f$ và $\alpha \in (0,1)$, ta có

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Hàm f được gọi là *chính thường* (tương ứng*, nửa liên tục dưới*) nếu $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và dom$f \ne \varnothing$ (tương ứng, epi$f$ là đóng).

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$, *bao đóng*, *phần trong tương đối* và *bao lồi* của D được kí hiệu theo thứ tự như sau cl$D$, ri$D$ và co$D$. Hàm *giá* σ_D được

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

định nghĩa là $\sigma_D(u) := \sup_{x\in D}\langle u, x\rangle$ và *nón sinh bởi* D được định nghĩa là $\operatorname{cone}D := \bigcup_{\alpha\ge 0}\alpha D.$ Cho $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Khi đó *hàm liên hợp* $f^*:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa là

$$f^*(u) = \sup\{\langle u, x\rangle - f(x) \mid x \in \operatorname{dom}f\}.$$

Cho $\varepsilon \ge 0$, ε*-dưới vi phân* của f tại $\overline{x} \in \operatorname{dom}f$, kí hiệu là $\partial_\varepsilon f(\overline{x})$, được định nghĩa như sau

$$\partial_\varepsilon f(\overline{x}) := \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon \text{ với mọi } x \in \operatorname{dom}f\}.$$

Chúng ta gọi *0-dưới vi phân* của f tại $\overline{x} \in \operatorname{dom}f$ là *dưới vi phân* của f tại $\overline{x} \in \operatorname{dom}f$.

Trong [8], các tác giả đã giới thiệu các qui tắc tính cho dưới vi phân như sau.

Bổ đề 2.1. *Xét* $f, f_i:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ i = 1,..., p$ *là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Khi đó ta có các mệnh đề sau.*

i) Với mọi $\lambda \ge 0, x \in \operatorname{dom}f,$ *ta có* $\partial(\lambda f)(x) = \lambda\partial f(x).$

ii) Nếu $\bigcap_{i=1}^p \operatorname{ri}(\operatorname{dom}f_i) \neq \emptyset$ *thì với mọi* $x \in \bigcap_{i=1}^p \operatorname{dom}f_i$ *ta có*

$$\partial(f_1 + ... + f_p)(x) = \sum_{i=1}^p \partial f_i(x).$$

Giả sử K là nón lồi đóng khác rỗng trên $\overline{\mathbb{R}}^m$, không cần phần trong khác rỗng và các hàm chính thường, nửa liên tục dưới $g_i:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ i = 1,\ldots,m.$ Ta kí hiệu

$$g := (g_1,\ldots,g_m) \text{ và } \operatorname{dom}g := \bigcap_{i=1}^m \operatorname{dom}g_i.$$

Ta nói rằng g là K-lồi nếu với mọi $x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom}g$ và $\alpha \in (0,1)$ ta có

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - \alpha g(x_1) - (1-\alpha)g(x_2) \in K.$$

Trong trường hợp $K = \overline{\mathbb{R}}^m_-,\ g = (g_1,\ldots,g_m),$ g là K-lồi khi và chỉ khi g_i là lồi trên $\overline{\mathbb{R}}^n$ với mọi $i = 1,\ldots,m.$

Bổ đề sau giới thiệu một kết quả quan trọng của hàm liên hợp. Kết quả này được trình bày ở ([6], trang 4).

Bổ đề 2.2. *Xét hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới* $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}.$ *Khi đó* $f^{**} = f.$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả bổ trợ. Các kết quả này được trình bày trong tài liệu [7] với giả thiết là liên tục và hàm *S*-lồi. Bổ đề sau là sự mở rộng của [7] trong trường hợp hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới.

Bổ đề 2.3 *Xét* $g_i:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1,\ldots,m$ *là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới* và $g := (g_1,\ldots,g_m)$ *với* $\operatorname{dom}g \neq \emptyset.$ *Khi đó* $g^{-1}(\overline{\mathbb{R}}^m_-) \neq \emptyset$ *khi và chỉ khi*

$$(0,-1) \notin \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}^m_+} \operatorname{epi}(\lambda g)^*).$$

Chứng minh. Xét $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}^m_+$ và $x^* \in \mathbb{R}^n$. Vì $g(x) > -\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $-\lambda g(x) \ge 0$ với mọi $x \in A := g^{-1}(\overline{\mathbb{R}}^m_-),$ ta có

$$\begin{aligned}(\lambda g)^*(x^*) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left[\left\langle x^*, x\right\rangle - (\lambda g)(x)\right]\\ &\ge \sup_{x\in A}\left[\left\langle x^*, x\right\rangle - (\lambda g)(x)\right]\\ &\ge \sup_{x\in A}\left[\left\langle x^*, x\right\rangle\right] = \sigma_A(x^*)\end{aligned}$$

trong đó σ_A là hàm giá của tập $A.$ Vì hàm giá là nửa liên tục dưới, ta có $\operatorname{epi}\sigma_A$ là đóng. Do đó

$$\operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}^m_+} \operatorname{epi}(\lambda g)^*) \subset \operatorname{epi}\sigma_A.$$

Nếu $A \neq \emptyset$ thì $(0,1) \in \operatorname{epi}\sigma_A$. Khi đó $(0,-1) \notin \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}^m_+} \operatorname{epi}(\lambda g)^*).$

Ngược lại, nếu $(0,-1) \notin \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}^m_+} \operatorname{epi}(\lambda g)^*)$ thì theo Định lí tách Hahn-Banch, tồn tại $(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sao cho với mọi $(u,v) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}^m_+} \operatorname{epi}(\lambda g)^*),$ ta có

$$\left\langle (x,\alpha),(0,-1)\right\rangle < 0,\ \left\langle (x,\alpha),(u,v)\right\rangle \ge 0.$$

Do đó $\alpha > 0$ và $\langle u, x \rangle + \alpha v \geq 0$ với mọi $(u, v) \in \mathrm{cl}(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \mathrm{epi}(\lambda \mathrm{g})^*)$, Đặt $\overline{x} = -\dfrac{x}{\alpha}$, ta có

$$\langle u, \overline{x} \rangle - v \leq 0 \text{ với mọi}$$
$$(u, v) \in \mathrm{cl}(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \mathrm{epi}(\lambda \mathrm{g})^*).$$

Vì vậy, với mọi $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}^m_+$, $u \in \mathrm{dom}(\lambda \mathrm{g})^*$, ta có $\langle u, \overline{x} \rangle - (\lambda g)^* \leq 0$. Vì λg là nửa liên tục dưới, áp dụng Bổ đề 2.2 ta có

$$(\lambda g)(\overline{x}) = (\lambda g)^{**}(\overline{x}) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left[\langle u, \overline{x} \rangle - (\lambda g)^*(u) \right] \leq 0$$

nghĩa là $g(\overline{x}) \in \overline{\mathbb{R}}^m_-$ nên ta có $\overline{x} \in A$ và do đó $A \neq \varnothing$. □

Chứng minh Bổ đề 2.3 tương tự như [7, Bổ đề 3.2]. Tuy nhiên ở đây chúng tôi giả thiết hàm đang xét là trên lớp hàm nửa liên tục dưới thay vì liên tục như trong [7]. Bằng cách như vậy, bổ đề sau cũng được chứng minh hoàn toàn tương tự như [8, Bổ đề 6.1].

Bổ đề 2.4. *Cho K là nón lồi trên $\mathbb{R}^m$ và $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}^m$ là hàm chính thường, K-lồi, nửa liên tục dưới. Khi đó*

$$A := \bigcup_{\lambda \in K^+} \mathrm{epi}(\lambda g)^*$$

là một nón lồi.

Chứng minh. Cho $(x^*, r) \in A$. Khi đó tồn tại $\lambda \in K^+$ sao cho $r \geq (\lambda g)^*(x^*)$. Với mọi $\alpha \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}(\lambda g)^*(\alpha x^*) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle \alpha x^*, x \rangle - \alpha \lambda g(x) \right] \\ &= \alpha \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle x^*, x \rangle - \lambda g(x) \right] \\ &= \alpha (\lambda g)^*(x^*) \leq \alpha r.\end{aligned}$$

Do đó, ta có $\alpha(x^*, r) \in \mathrm{epi}(\lambda g)^* \subset A$. Nghĩa là A là một nón.

Xét $(x_1^*, r_1), (x_2^*, r_2) \in A$. Khi đó tồn tại $\lambda_1 \in K^+, \lambda_2 \in K^+$ sao cho

$$(x_1^*, r_1) \in \mathrm{epi}(\lambda_1 g)^* \text{ và } (x_2^*, r_2) \in \mathrm{epi}(\lambda_2 g)^*.$$

Với mọi $\gamma \in (0,1)$ ta có $\lambda = \gamma \lambda_1 + (1-\gamma)\lambda_2 \in K^+$ và

$$\begin{aligned}(\lambda g)^*(\gamma x_1^* + (1-\gamma) x_2^*) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle \gamma x_1^* + (1-\gamma) x_2^* \rangle - \lambda g(x) \right] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle \gamma_1 x_1^*, x \rangle - \gamma \lambda_1 g(x) + \langle (1-\gamma) x_2^*, x \rangle - (1-\gamma) \lambda_2 g(x) \right] \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle \gamma_1 x_1^*, x \rangle - \gamma \lambda_1 g(x) \right] + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle (1-\gamma) x_2^*, x \rangle - (1-\gamma) \lambda_2 g(x) \right] \\ &= \gamma (\lambda_1 g)^*(x_1^*) + (1-\gamma)(\lambda_2 g)^*(x_1^*) \\ &\leq \gamma r_1 + (1-\gamma) r_2\end{aligned}$$

nghĩa là $\gamma(x_1^*, r_1) + (1-\gamma)(x_2^*, r_2) \in \mathrm{epi}(\lambda \mathrm{g})^* \subset A$. Do đó, A là một tập lồi. Vì vậy, bổ đề đã được chứng minh. □

Cuối cùng, chúng tôi giới thiệu lại một số kết quả của giải tích lồi. Các kết quả này được sử dụng để chứng minh kết quả chính của chúng tôi. Độc giả có thể tham khảo [2], [7] cho sự giới thiệu chi tiết của các kết quả.

Bổ đề 2.5 ([7], Mệnh đề 2.1). *Cho X là không gian Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và $\overline{x} \in \mathrm{dom} f$. Khi đó ta có*

$$\mathrm{epi} f^* = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v, \varepsilon + \langle v, \overline{x} \rangle - f(x)) \mid v \in \partial_\varepsilon f(\overline{x}))\}.$$

Mệnh đề 2.6 ([2], Định lí Brondsted Rockafellar). *Cho X là không gian Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Khi đó, với mọi số thực $\varepsilon \geq 0$, $x^* \in \partial_\varepsilon f(\overline{x})$ tồn tại $x_\varepsilon \in X, x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)$ sao cho*

$$\|x_\varepsilon - \overline{x}\| \leq \sqrt{\varepsilon}, \|x_\varepsilon^* - x^*\| \leq \sqrt{\varepsilon},$$
$$\left| f(x_\varepsilon) - f(\overline{x}) - \langle x_\varepsilon^*, x_\varepsilon - \overline{x} \rangle \right| \leq 2\varepsilon.$$

3. Điều kiện tối ưu theo dãy cho bài toán tối ưu

Trong mục này, chúng tôi sẽ xây dựng điều kiện cần và đủ theo dãy cho nghiệm của bài toán (P). Các điều kiện tối ưu này có được mà không cần kèm theo các điều kiện chính qui như các điều kiện chính qui Slater, ACQ, BCQ, MFCQ.

Định lí 3.1. *Xét bài toán* (P). *Cho $g = (g_1, \ldots, g_m)$ và $\overline{x} \in g^{-1}(\tau)$. Khi đó $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán* (P) *khi và chỉ khi tồn tại $u^* \in \partial f(\overline{x})$, $x_n \to \overline{x}$, $\lambda_n = (\lambda_n^1, \ldots, \lambda_n^p) \in \overline{\mathbb{R}}^p_+$ và $w_n^* \in \partial(\sum_{i=1}^p \lambda_n^i (a_i^T g(x_n)))$ sao cho $u^* + w_n^* \to 0$ và $\sum_{i=1}^p \lambda_n^i (a_i^T g(\overline{x}) - b_i) \to 0$ khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Đặt $\tilde{g}_i(x) := a_i^T g(x) - b_i$, $\forall i = 1,...,p$. Khi đó $\overline{x} \in g^{-1}(\tau)$ khi và chỉ khi $\overline{x} \in \tilde{g}^{-1}(\mathbb{R}_-^p)$. Bài toán (P) trở thành

$$\min f(x) \text{ sao cho } \tilde{g}(x) \le 0.$$

Ta chứng minh $\overline{x}$ là nghiệm của bài toán (P) khi và chỉ khi tồn tại $u^* \in \partial f(\overline{x})$ sao cho

$$(-u^*, -\langle u^*, \overline{x}\rangle) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*). \quad (1)$$

Thật vậy, nếu (1) thỏa mãn thì khi đó tồn tại $\{\mu_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^p$, $\{u_n^*\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{r_n\} \subset \mathbb{R}$ sao cho

$$u_n^* \to -u^*,\ r_n \to -\langle u^*, \overline{x}\rangle,\ (\mu_n\tilde{g})^*(u_n^*) \le r_n,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, với mọi $x \in \tilde{g}^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_-^p)$ ta có

$$\langle u_n^*, x\rangle \le r_n + \mu_n\tilde{g} \le r_n.$$

Cho $n \to \infty$ ta có $-\langle u^*, x\rangle \le -\langle u^*, \overline{x}\rangle$. Điều này tương đương với

$$-\langle u^*, x\rangle + \langle u^*, \overline{x}\rangle \le 0, \text{ với mọi } x \in \tilde{g}^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_-^p) := \Omega.$$

Do đó ta có $-\langle u^*, x - \overline{x}\rangle \le 0$, $-u^* \in \mathrm{N}(\overline{x}, \Omega)$.

Suy ra $0 \in \partial f(\overline{x}) + \mathrm{N}(\overline{x}, \Omega)$.

Vậy $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán (P).

Ngược lại, giả sử $\overline{x}$ là nghiệm của bài toán (P). Khi đó tồn tại $u^* \in \partial f(\overline{x})$ sao cho

$$\langle u^*, x\rangle \ge \langle u^*, \overline{x}\rangle, \text{ với mọi } x \in \tilde{g}^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_-^p).$$

Ta cần chứng minh (1) đúng bằng phản chứng. Giả sử ngược lại

$$(-u^*, -\langle u^*, \overline{x}\rangle) \notin \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*).$$

Vì $\tilde{g}^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_-^p) \ne \varnothing$ nên theo Bổ đề 2.3 ta có

$$(0, -1) \notin \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*) \text{ với } \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^p.$$

Chúng ta khẳng định rằng

$$\mathrm{B} \cap \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*) = \varnothing,$$

trong đó $\mathrm{B} := \{\delta(-u^*, -\langle u^*, \overline{x}\rangle) + (1-\delta)(0, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \delta \in [0,1]\}$ là đoạn thẳng nối hai điểm $(-\langle u^*, x\rangle, -\langle u^*, \overline{x}\rangle)$ và $(0, -1)$. Để thấy được điều này ta giả sử ngược lại rằng

$$\mathrm{B} \cap \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*) \ne \varnothing,$$

Khi đó tồn tại $\delta \in [0,1]$ sao cho

$$\delta(-u^*, -\langle u^*, \overline{x}\rangle) + (1-\delta)(0, -1) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*)$$

nghĩa là

$$(-\delta u^*, -\delta\langle u^*, \overline{x}\rangle - (1-\delta)) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*).$$

Mặt khác, vì $0 \in \mathbb{R}_+^p$, $\operatorname{epi}(0\tilde{g})^* = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ nên $\{0\} \times \mathbb{R}_+ \subset \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*)$. Từ Bổ đề 2.4 ta có

$$(-\delta u^*, -\delta\langle u^*, \overline{x}\rangle) = (-\delta u^*, -\delta\langle u^*, \overline{x}\rangle - (1-\delta)) + (0, 1-\delta) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*).$$

Do đó

$$(-u^*, -\langle u^*, \overline{x}\rangle) = \frac{1}{\delta}(-\delta u^*, -\delta\langle u^*, \overline{x}\rangle) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*).$$

Đây là một sự mâu thuẫn. Vậy khẳng định trên là đúng.

Áp dụng Định lí tách Hahn-Banch, tồn tại $(x, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $(x, \beta) \ne (0, 0)$ sao cho

$$\left[\delta(-u^*, -\langle u^*, \overline{x}\rangle) + (1-\delta)(0, -1)\right](x, \beta) < 0, \text{ với}$$

mọi $\delta \in [0,1]$

và $\langle v, x\rangle + \gamma\beta \ge 0$, với mọi $(v, \gamma) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*)$.

Cho $\delta = 0$ ta có $\beta > 0$ và cho $\delta = 1$ ta có $\langle u^*, x\rangle + \langle u^*, \overline{x}\rangle\beta > 0$. Do đó

$$\left\langle u^*, \frac{-x}{\beta}\right\rangle < \langle u^*, \overline{x}\rangle.$$

Mặt khác

$$-\frac{1}{\beta}\langle v, x\rangle - \delta \le 0, \forall (v, \delta) \in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^p} \operatorname{epi}(\lambda\tilde{g})^*).$$

Suy ra

$$-\frac{1}{\beta}\langle v, x\rangle - (\lambda\tilde{g})^*(v) \le 0, v \in \operatorname{dom}(\lambda\tilde{g})^*.$$

Do đó với mọi $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^1) \in \overline{\mathbb{R}}_+^p$ ta có

$$(\lambda g)(\frac{-x}{\beta}) = (\lambda\tilde{g})^{**}(\frac{-x}{\beta}) = \sup_{v \in dom(\lambda\tilde{g})^*}(-\frac{1}{\beta}\langle v, x\rangle - (\lambda\tilde{g})^*(v)) \le 0.$$

Suy ra $\frac{-x}{\beta} \in \tilde{g}^{-1}(\mathbb{R}_-^p)$, điều này mâu thuẫn với $\left\langle u^*, -\frac{x}{\beta}\right\rangle \le \langle u^*, \overline{x}\rangle$. Do đó (1) đúng.

Áp dụng Bổ đề 2.5 ta có (1) tương đương với

$$(-u^*,-\langle u^*,\overline{x}\rangle)\in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}_+^p}\bigcup_{\varepsilon\geq 0}\{(w,\varepsilon+\langle w,\overline{x}\rangle-(\lambda\tilde{g})(\overline{x}))\mid w\in\partial_\varepsilon(\lambda\tilde{g})(\overline{x})\}. \quad (2)$$

Do đó, tồn tại dãy $\lambda_n=(\lambda_n^1,\ldots,\lambda_n^p)\in\overline{\mathbb{R}}_+^p$, $\varepsilon_n\in\mathbb{R}_+$ và $v_n^*\in\partial_{\varepsilon_n}\lambda_n\tilde{g}(\overline{x})$ sao cho

$$(-u^*,-\langle u^*,\overline{x}\rangle)=\lim(v_n^*,\varepsilon_n+\langle v_n^*,\overline{x}\rangle-\lambda_n^i\tilde{g}_i(x_n)).$$

Điều này có nghĩa là

$$u^*+v_n^*\to 0,\ u^*\in\partial f(\overline{x}),\ v_n^*\in\partial_{\varepsilon_n}\lambda_n\tilde{g}(\overline{x}),$$
$$\langle u^*+v_n^*,\overline{x}\rangle+\varepsilon_n-\lambda_n(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0. \quad (3)$$

Suy ra

$$\varepsilon_n-\sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0. \quad (4)$$

Vì $\overline{x}\in\tilde{g}^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_-^p)$ nên $\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\leq 0$ với mọi $i=1,\ldots,p$. Kết hợp với (4) ta có

$$\varepsilon_n\to 0 \text{ và } \lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0.$$

Vì vậy, tồn tại dãy $\lambda_n\in\overline{\mathbb{R}}_+^p$, $\varepsilon_n\to 0$, $u^*\in\partial f(\overline{x}), v_n^*\in\partial_{\varepsilon_n}\lambda_n\tilde{g}(\overline{x})$ sao cho

$$u^*+v_n^*\to 0,\ \sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0.$$

Áp dụng Mệnh đề 2.6, với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta có $x_n\in\mathbb{R}^n$ và $w_n^*\in\partial(\lambda_n\tilde{g})(x_n)$ sao cho

$$\| x_n-\overline{x}\|<\sqrt{\varepsilon_n},\ \| w_n^*-v_n^*\|<\sqrt{\varepsilon_n},$$
$$|(\lambda_n\tilde{g})(x_n)-(\lambda_n\tilde{g})(\overline{x})-\langle w_n^*,x_n-\overline{x}\rangle|<2\varepsilon_n.$$

Vì $\varepsilon_n\to 0, v_n^*\to -u^*\in\partial f(\overline{x})$ và $\sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0$, ta có

$$x_n\to\overline{x}, u^*+w_n^*\to 0 \text{ và}$$
$$\sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0,$$

Hơn nữa, ta có

$$w_n^*\in\partial_{\varepsilon_n}\lambda_n\tilde{g}(\overline{x})=\partial(\sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i))=\partial(\sum_{i=1}^p\lambda_n^ia_i^Tg(x_n)).$$

Suy ra tồn tại $u^*\in\partial f(\overline{x})$, $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}_+^p$, $x_n\to\overline{x}$, $w_n^*\in\partial(\sum_{i=1}^p\lambda_n^ia_i^Tg(x_n))$ thỏa mãn

$$u^*+w_n^*\to 0 \text{ và } \sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0.$$

Do đó, điều kiện cần đã được chứng minh.

Để chứng minh điều kiện đủ ta giả sử ngược lại rằng tồn tại $u^*\in\partial f(\overline{x})$, $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}_+^p$, $x_n\to\overline{x}$, $w_n^*\in\partial(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)$ thỏa mãn

$$u^*+w_n^*\to 0 \text{ và } \sum_{i=1}^p\lambda_n^i(a_i^Tg(\overline{x})-b_i)\to 0.$$

Khi đó, với $\tilde{g}$ như trên, ta có $(\lambda_n\tilde{g})^*(w_n^*)=\langle w_n^*,x_n\rangle-\lambda_n\tilde{g}(x_n)$. Vì vậy

$$(w_n^*,\langle w_n^*,x_n\rangle-\lambda_n\tilde{g}(x_n))\in \operatorname{epi}(\lambda_n\tilde{g})^*.$$

Hơn nữa, ta cũng có $x_n\to\overline{x}, w_n^*+u_n^*\to 0$ và $\lambda_n\tilde{g}(x_n)\to 0$. Do đó, ta có

$$\langle w_n^*,x_n\rangle-(\lambda_n\tilde{g})(x_n)\to -\langle u^*,\overline{x}\rangle.$$

Suy ra

$$(w_n^*,\langle w_n^*,x_n\rangle-(\lambda_n\tilde{g})(x_n))\to(-u^*,-\langle u^*,\overline{x}\rangle),$$

nghĩa là

$$(-u^*,-\langle u^*,\overline{x}\rangle)\in \operatorname{cl}(\bigcup_{\lambda\in\overline{\mathbb{R}}_+^p}\operatorname{epi}(\lambda_n\tilde{g})^*).$$

Sử dụng (1), ta có $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu của bài toán (P). Vậy điều kiện đủ được chứng minh.

Do đó định lí đã được chứng minh. □

Kết thúc bài báo này, chúng tôi giới thiệu một ví dụ để khẳng định rằng kết quả của chúng tôi là khác biệt với kết quả trong [7].

Ví dụ 3.2. *Xét bài toán tối ưu có ràng buộc sau*

$$\begin{aligned}&\min\quad f(x)\\ &\text{sao cho } x\in\Omega:=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\in\tau\},\end{aligned}\quad (P1)$$

trong đó $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\in[-1,1]\\ +\infty, & x\notin[-1,1]\end{cases}$, $g(x)=x$ và $\tau:=\{x\in\mathbb{R}\mid 3x\leq 2\}$.

Vì $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ không liên tục nên kết quả trong tài liệu [7] không thể áp dụng cho Bài toán (P1). Tuy nhiên, các điều kiện trong Định lí 3.1 được thỏa mãn. Hơn nữa lấy $x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$, $\lambda_n=\dfrac{1}{n}\to 0^+$. Khi đó $\partial f(0)=[-1,1]$,

$\partial g(x_n) = 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chọn $u^* = 0 \in \partial f(0)$, $v_n^* = 1 \in \partial g(x_n)$, với mọi n. Khi đó ta có

$$u^* + \lambda_n 3 v_n^* = \frac{3}{n} \to 0,\ \lambda_n(a^T g(x_n) - b) = \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} \to 0.$$

Theo Định lí 3.1 thì ta có $\overline{x} = 0$ là nghiệm tối ưu của Bài toán (P1).

Kiểm tra trực tiếp ta thấy $\overline{x} = 0$ là nghiệm tối ưu duy nhất của Bài toán (P1).

Tài liệu tham khảo

[1]. J. M. Borwein and H. Wolkowicz (1982), "Characterizations of optimality without constraint qualification for the abstract convex program", *Math. Programming Stud.*, (19), p. 77-100.

[2]. A. Brondsted and R. T. Rockafellar (1965), "On the subdifferentiability of convex functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (16), p. 605-611.

[3]. S. Dempe and A. B. Zemkoho (2012), "On the Karush-Kuhn-Tucker reformulation of the bilevel optimization problem", *Nonlinear Anal.*, (75), p. 1202-1218.

[4]. S. Dempe, N. Dinh, and J. Dutta (2010), "Optimality Conditions for a Simple Convex Bilevel Programming Problem", *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control Springer Optimization and Its Applications*, (47), p. 149-161.

[5]. A. Dhara and J. Dutta (2012), *Optimality Conditions in Convex Optimization*, A Finite-Dimension View, Taylor and Francis Group.

[6]. W. Heins and S. K. Mitter (1970), "Conjugate convex function, Duality and Optimal control, Problem I: Systems Governed Ordinary Differential equations", *Inform. Sciences*, (2), p. 211-243.

[7]. V. Jeyakumar, G. M. Lee, and N. Dinh (2003), "New sequential Lagrange multiplier conditions charactering optimality without constraint qualification for convex programs", *Siam J. Optim.*, (14), p. 534-547.

[8]. V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, B. M. Glover, and Y. Ishizuka (1996), "Inequality systems and Global optimization", *J. Math. Anal. App.*, (202), p. 900-919.

[9]. P. Kanniappan (1983), " Necessary condition for optimality of nondifferentiable convex multiobjective programming", *J. Optim. Theory and App.*, (40), p. 167-174.

[10]. L. Thibault (1997), "Sequential convex subdifferential calculus and Lagrange multipliers", *Siam J. Control Optim.*, (7), p. 641-662.

SEQUENTIALLY NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR SOLUTIONS OF OPTIMIZATION PROBLEMS WITH INCLUSION CONSTRAINTS

Summary

In this paper, we provide sequentially necessary and sufficient conditions for optimal solutions of optimization problems with inclusion constraints. The sequentially optimal conditions obtained are without any constraints.

Keywords: Sequence; solutions of optimization problem; inclusion constraints.

Ngày nhận bài: 01/3/2017; Ngày nhận lại: 26/4/2017; Ngày duyệt đăng: 25/5/2017.