ĐỀ XUẤT MỘT SỐ GIẢI THUẬT LẬP TRÌNH TRÊN MÁY TÍNH CASIO FX-570VN PLUS ĐỂ GIẢI NHANH CÁC DẠNG TOÁN SƠ CẤP

• Lê Văn Huy(*), Lê Trung Hiếu(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số giải thuật lập trình trên dòng máy tính Casio fx-570VN Plus để giải nhanh các dạng toán về liên phân số, phương trình nghiệm nguyên và phương trình vô tỉ. Việc giải toán theo các giải thuật và quy trình mới này sẽ rút ngắn thời gian tính toán, hạn chế sai số và góp phần đơn giản hóa các quy trình tính toán theo những phương pháp thông thường trước đây. Mỗi dạng toán được đề cập dưới đây, chúng tôi đều có ví dụ được tính toán chi tiết nhằm minh họa cho các kết quả đạt được.

Từ khóa: Máy tính cầm tay, Casio fx-570VN Plus, giải thuật lập trình, liên phân số, phương trình Điophant, phương trình vô tỉ.

1. Mở đầu

Năm 2013, dòng máy tính Casio fx-570VN Plus ra đời với nhiều tính năng mới được cải tiến vượt trội hơn so với các phiên bản trước. Hiện tại đây là một trong những dòng máy tính cầm tay (MTCT) có nhiều chức năng nhất trên thị trường, được Bộ Giáo dục và Đào tạo cho phép thí sinh mang vào phòng thi ([1]). Trong số các chức năng mới, đặc biệt có các chức năng số học như tìm dư trong phép chia số học ($\div$R), tìm ước chung lớn nhất (GCD), tìm bội chung nhỏ nhất (LCM), lấy phần nguyên (Int, Ingt)… Một tiện lợi là máy tính Casio fx-570VN Plus cho phép người sử dụng đưa những phím chức năng mới này vào trong biểu thức lệnh của giải thuật lập trình. Trong thời gian qua, đã có nhiều nghiên cứu chỉ ra nhiều hiệu quả thiết thực của việc sử dụng MTCT trong việc dạy và học môn toán như nghiên cứu của Pomerant (1997), Lê Thái Bảo Thiên Trung (2011) và Mohd Yusuf Yasin (2012) ([5], [9], [10]). Vì vậy, việc nghiên cứu tìm hiểu chuyên sâu về các thuật toán lập trình trên MTCT, đặc biệt là đối với các dòng máy tính mới, góp phần sử dụng hiệu quả MTCT vào việc tính toán nhanh, tiết kiệm thời gian, nâng cao tư duy giải thuật và hiệu quả học tập, nghiên cứu mà không làm giảm kĩ năng tính toán của người sử dụng.

Khi giải toán sơ cấp, chúng ta thường gặp một số dạng toán phải tính toán và ghi chép qua khá nhiều bước trung gian, điều này không những mất nhiều thời gian mà còn gây ra sai số tính toán và dễ nhầm lẫn kết quả. Để khắc phục những khó khăn trên, việc nghiên cứu viết giải thuật lập trình giải toán trên MTCT là rất cần thiết nhằm tránh được sai số lớn khi tính toán và ghi chép ở các bước trung gian, đồng thời tiết kiệm được khá lớn lượng thời gian giải toán. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một số giải thuật sử dụng những chức năng mới của dòng máy tính Casio fx-570VN Plus để giải các bài toán về liên phân số hữu hạn; liên phân số vô hạn; phương trình nghiệm nguyên Điophant (Diophantine equation) bậc nhất hai ẩn; ứng dụng liên phân số để giải phương trình vô tỉ. Việc áp dụng các giải thuật này sẽ rút ngắn thời gian tính toán; hạn chế sai số khi ghi chép ở các bước trung gian; góp phần đơn giản hóa các quy trình tính toán theo cách thông thường trước đây. Xa hơn, lợi ích sư phạm của việc sử dụng các giải thuật lập trình mới này trong giải toán MTCT là góp phần tích cực vào việc rèn luyện cho người học, đặc biệt là học sinh, sinh viên chuyên toán - tin, về tư duy thuật toán và giúp họ khai thác sâu hơn một số yếu tố về lập trình máy tính như gán biến tin học, chạy vòng lặp. Qua đó, giáo viên có thể khai thác để dạy tích hợp tin học trong môn toán.

Để việc trình bày các giải thuật trong suốt bài báo được ngắn gọn, chúng tôi quy ước:

(i) Nhập biến nhớ *A* vào màn hình, ta chỉ cần viết *A*, thay vì phải viết đầy đủ tổ hợp ALPHA *A* (tương tự đối với các biến *B, C, D, E, F, X, Y, M* và các phím chức năng $\div$ R, GCD, Int).

(ii) Kí hiệu = và : trong giải thuật lập trình được hiểu là dấu bằng và dấu hai chấm (màu đỏ)

(*) Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Trường Đại học Đồng Tháp.

dùng trong lập trình. Các phím này được gọi ra thông qua phím ALPHA.

(iii) Kí hiệu "=" được hiểu là dấu bằng (màu trắng) dùng để gọi trực tiếp kết quả trên màn hình. Nó phân biệt với dấu = màu đỏ dùng trong lập trình, nêu trong (ii).

(iv) Tất cả các giải thuật đều được hiểu là thực hiện ở chế độ MODE COMP (tính toán thông thường).

2. Một số giải thuật lập trình

2.1. Tìm liên phân số hữu hạn

Cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ với *a, b* là hai số nguyên dương. Chúng tôi nhắc lại thuật toán Ơclit đưa $\frac{a}{b}$ về dạng liên phân số như sau: Chia lấy dư liên tục như sau cho đến khi dư bằng 0,

$$a = bq_0 + r_1,\ 0 < r_1 < b;$$
$$b = r_1q_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1;$$
$$\dots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1};$$
$$r_{n-1} = r_nq_n.$$

Trong đó $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ là những số nguyên dương và $q_n > 1$. Khi đó, ta có

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\dots}}}. \qquad (1)$$

q_s được gọi là số hạng thứ *s* của liên phân số (1). Liên phân số (1) còn được kí hiệu dưới dạng

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]. \qquad (2)$$

Hệ quả 1 ([8], Hệ quả, tr. 93). *Mỗi liên phân số hữu hạn đều biểu thị một số hữu tỉ, hay còn nói đều có giá trị là số hữu tỉ. Đảo lại mỗi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một liên phân số hữu hạn.*

Nhận xét. Khi phân tích một số hữu tỉ thành liên phân số theo thuật toán Ơclit, nếu làm bằng cách chia thủ công và ghi kết quả của từng bước ra giấy sẽ tốn khá nhiều thời gian cho các công đoạn trung gian và dễ sai sót đối với *a, b* là những số lớn. Để giảm thời gian tính toán và hạn chế sai sót ở các bước trung gian, chúng tôi đề xuất giải thuật mới trên máy Casio fx-570VN Plus để tìm liên phân số hữu hạn một cách khá nhanh gọn như sau.

Giải thuật. Nhập vào màn hình máy tính $C = A \div \mathrm{R}B : D = A - CB : A = B : B = D.$

Bấm CALC, máy hỏi *A*? Nhập *a* "=", B? Nhập *b* "=", ta được $C = q_0$.

Bấm "=" "="… liên tiếp để chạy hết các vòng lặp tiếp theo. Ở mỗi vòng lặp ta tìm được một giá trị của *C* thì giá trị của *C* lần lượt là giá trị của $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$.

Khi số dư $\mathrm{R} = 0$ (tại bước tính $C = A \div \mathrm{R}B$) (hoặc nếu bỏ lỡ qua bước này thì đến khi máy báo lỗi do chia cho 0) thì dừng giải thuật.

Giải thích giải thuật: Máy tính chạy thuật toán Ơclit và gán các giá trị ở các bước tiếp theo một cách tự động thay vì thiết lập phép chia thủ công trên giấy để tính và ghi chép qua từng bước. Trong giải thuật này, chúng tôi khai thác phím $\div$ R để tìm ra thương và dư trong phép chia của *a* cho *b* ($C = A \div \mathrm{R}B$). Khi đó, với $A = a, B = b$ được nhập vào từ CALC thì kết quả của phép chia là $C = q_0$ và dư là r_1. Để đưa số dư $r_1 = a - bq_0$ vào biến nhớ trên máy tính, ta gán nó vào biến *D* bằng cách đặt $D = A - CB$ (khi đó $D = r_1$). Để qua vòng lặp thứ hai, ta gán $a = b, b = r_1$ sẽ được vòng lặp tương tự để tìm r_2. Lần lượt máy cũng gán tự động các biến để chạy các vòng lặp tiếp theo cho đến khi dư $\mathrm{R} = 0$ hoặc máy báo lỗi (do chia cho 0) thì ta dừng giải thuật.

Thuận lợi của giải thuật này là sau khi nhập *a, b* từ thao tác CALC, chúng ta chỉ việc bấm "=" "=" … liên tục để được kết quả mà không cần bất kì thao tác chia thủ công nào. Do vậy, giải thuật sẽ tiết kiệm thời gian và hạn chế sai số, đặc biệt khi *a, b* là các số lớn.

Ví dụ. Biểu diễn $\frac{25908455}{9618881}$ thành liên phân số.

Giải. Nhập vào màn hình $C = A \div \mathrm{R}B : D = A - CB : A = B : B = D.$

Bấm CALC, *A*? Nhập 25908455 "=", *B*? Nhập 9618881 "=". Khi đó ta được $C = 2$, nghĩa là $q_0 = 2$.

Bấm "=" "=" … qua các vòng lặp tiếp theo ta thu được các giá trị mới của C. Cụ thể $C = q_1 = 1, C = q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 1, q_5 = 4,$ $q_6 = 5, q_7 = 6, q_8 = 2, q_9 = 3, q_{10} = 4, q_{11} = 5,$ $q_{12} = 1, q_{13} = 3, q_{14} = 6.$

Vậy $\dfrac{25908455}{9618881} = [2;1,2,3,1,4,5,6,2,3,4,5,1,3,6].$

Nhận xét. Nếu giải bài toán trên bằng thủ công và xem như các bước tính toán, ghi chép ở 15 bước trung gian là hoàn toàn chính xác thì người giải thành thạo cũng mất khá nhiều thời gian và dễ bị sai sót, trong khi giải trên máy tính một cách nhanh chóng chỉ mất khoảng 1 phút và độ chính xác cao vì máy đã tính và gán giá trị một cách tự động.

Bài toán đề xuất. Biểu diễn $\dfrac{1082516119}{206579921}$ thành liên phân số.

Kết quả:

$\dfrac{1082516119}{206579921} = [5; 4, 6, 8, 1, 2, 3, 1, 4, 7, 3, 2, 1, 1, 6, 2, 1, 5].$

2.2. Tìm liên phân số bằng cách tách phần nguyên

Mỗi liên phân số vô hạn là biểu thức số học có dạng

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\dots + q_s + \cfrac{1}{\dots}}}}. \quad (3)$$

mà ta còn kí hiệu là $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_s, \dots]$, gồm vô số phần tử q_s, $s = 0, 1, 2, \dots$ với q_0 là một số nguyên, còn q_s là những số nguyên dương với mọi $s \neq 0$. Phần tử q_s được gọi là số hạng thứ s của liên phân số (3) ([8]).

Sau đây chúng tôi nhắc lại cách biểu diễn số thực $\alpha > 0$ thành liên phân số, đối với trường hợp α là số âm thì ta chỉ việc thêm vào dấu trừ trước số dương tương ứng ([8]). Cho α là một số thực dương, ta sẽ xác định các số nguyên q_s và các số thực α_{s+1} tương ứng $(s = 0, 1, 2, \dots)$ như sau:

Lấy $q_0 = [\alpha]$ (phần nguyên của α). Nếu $q_0 = \alpha$ (tức α là số nguyên) thì dừng giải thuật; nếu $q_0 < \alpha$ thì ta tìm được $\alpha_1 > 1$ sao cho $\alpha = q_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$.

Lấy $q_1 = [\alpha_1]$. Nếu $q_1 = \alpha_1$ thì dừng giải thuật; nếu $q_1 < \alpha_1$ thì ta tìm được số $\alpha_2 > 1$ sao cho $\alpha_1 = q_1 + \dfrac{1}{\alpha_2}$. Khi đó, $\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$.

Tiếp tục quá trình trên, giả sử qua s lần (với $q_{s-1} < \alpha_{s-1}$), ta được

$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{s-1}, \alpha_s], \quad (4)$$

trong đó $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{s-1}$ là những số nguyên dương. Quá trình trên có thể kết thúc sau một số hữu hạn bước với $[\alpha_n] = \alpha_n = q_n$ hoặc cũng có thể không kết thúc, nghĩa là với mọi s thì α_s đều không phải là số nguyên. Trong cả hai trường hợp thì quá trình trên cho ta một liên phân số hữu hạn hay liên phân số vô hạn hoàn toàn được xác định $\delta = [q_0; q_1, q_2, \dots]$.

Lưu ý, xét trường hợp α được biểu diễn dưới dạng liên phân số vô hạn $\delta = [q_0; q_1, q_2, \dots]$ nhưng tuần hoàn, tức là có hai chỉ số $k, l\ (1 \le k \le l)$ sao cho bộ giá trị $q_k, q_{k+1}, \dots, q_l$ luôn được lặp lại một cách liên tục. Khi đó, ta kí hiệu $\delta = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, (q_k, q_{k+1}, \dots, q_l)]$.

Định lí 1 ([8], Định lí 2)**.** *Nếu α là số hữu tỉ thì liên phân số δ do α sinh ra bằng cách tách phần nguyên là hữu hạn và có giá trị chính là bằng α.*

Định lí 2 ([8], Định lí 3)**.** *Nếu α là số vô tỉ thì liên phân số δ do α sinh ra bằng cách tách phần nguyên là vô hạn và có giá trị chính là bằng α.*

Định lí 3 ([8], tr. 108)**.** *Mỗi số thực biểu diễn thành liên phân số duy nhất.*

Nhận xét. Để biểu diễn một số thực $\alpha > 0$ thành liên phân số, ta lần lượt tìm các giá trị $q_0, q_1, \dots$ bằng cách tách phần nguyên. Nếu quá trình này được thực hiện thủ công thì sẽ qua nhiều bước, mất nhiều thời gian, dễ bị sai sót ở các bước trung gian. Để khắc phục những khó khăn trên chúng tôi đề xuất giải thuật lập trình máy tính giúp tính toán nhanh và gán biến một cách tự động sau đây.

Giải thuật. Nhập vào màn hình máy tính $\text{Int}(X): X = \dfrac{1}{X - \text{Int}(X)}$.

Bấm CALC, máy hỏi *X*? nhập α "=". Khi đó, $\text{Int}(X) = q_0$.

Bấm "=" "=" … liên tiếp để chạy các vòng lặp tiếp theo. Khi đó, ở mỗi vòng lặp tiếp theo ta được $\text{Int}(X) = q_1, q_2, q_3, \ldots$

Nếu α là số hữu tỉ thì giải thuật sẽ dừng sau hữu hạn vòng lặp. Khi đó, ta quan sát khi nào *X* và Int(*X*) bằng nhau hoặc máy báo lỗi Math ERROR (do chia cho 0) thì dừng giải thuật.

Nếu α là số vô tỉ thì liên phân số là vô hạn. Khi đó, giải thuật có thể sẽ chạy đến vô hạn bước. Để kết thúc giải thuật, có hai tình huống: Nếu liên phân số là vô hạn tuần hoàn thì ta chỉ chạy đến khi nào phát hiện sự lặp lại của bộ số tuần hoàn và kết thúc giải thuật. Nếu liên phân số là vô hạn không tuần hoàn thì ta không phát hiện sự lặp lại của bộ số tuần hoàn, do vậy ta có thể dừng sau một số bước đủ lớn và ghi kết quả.

Giải thích giải thuật: Giải thuật sử dụng phương pháp tách phần nguyên của số thực α bằng cách sử dụng chức năng Int. Khi bấm CALC và nhập α vào biến *X*, ta tính được $\text{Int}(X) = [\alpha] = q_0$. Tiếp theo, nếu $q_0 < \alpha$ thì ta gán giá trị *X* mới bởi $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - q_0} > 1$ và tiếp tục trở lại vòng lặp tương tự. Khi đó, máy tính sẽ tính và gán biến một cách tự động.

Ví dụ. Biểu diễn $\sqrt{628}+1$ thành liên phân số.

Giải. Nhập vào màn hình biểu thức $\text{Int}(X): X = \dfrac{1}{X - \text{Int}(X)}$.

Bấm CALC, *X*? nhập $\sqrt{628}+1$ "=". Khi đó, $\text{Int}(X) = q_0 = 26$.

Bấm "=" "=" … liên tục để qua các vòng lặp tiếp theo.

Ta được

$\text{Int}(X) = q_1 = 16, q_2 = 1, q_3 = 2, q_4 = 5, q_5 = 4, q_6 = 2, \ldots, q_{26} = 50.$

Ta thấy $q_{27} = 16, q_{28} = 1, q_{29} = 2, \ldots,$ hoàn toàn lặp lại bộ giá trị từ q_1 đến q_{26}. Do đó, ta được

$\sqrt{628}+1 = [26; (16, 1, 2, 5, 4, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 12, 3, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 4, 5, 2, 1, 16, 50)].$

Nhận xét. Thực hiện cách giải trên máy tính như ví dụ trên, chúng ta chỉ mất hơn một phút trong khi nếu giải bằng thao tác thủ công, dù người giải có thành thạo các thao tác tính toán đến mức độ nào thì cũng phải mất một lượng thời gian lớn để được kết quả cuối cùng. Ngoài ra kết quả cũng dễ bị sai sót nếu tính toán và lấy gần đúng qua nhiều bước theo cách thủ công thông thường. Máy tính đã khắc phục được điểm yếu này do đã gán biến một cách tự động, kết quả các bước trung gian do đó cũng là các số chính xác.

Bài toán đề xuất. Biểu diễn $\sqrt{13280}-29$ thành liên phân số.

Kết quả:

$\sqrt{13280} - 29 = [86; (4, 5, 2, 1, 2, 4, 3, 57, 3, 4, 2, 1, 2, 5, 4, 230)].$

2.3. Giải phương trình Điophant

Bài toán. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình*

$$ax + by = c \tag{5}$$

với $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0.$

Nghiệm của phương trình (5) là cặp số nguyên (*x,y*) thỏa mãn (5). Kí hiệu $d = UCLN(a,b),$ ta có một số tính chất cơ bản sau đây.

Định lí 4 ([6], Định lí 1.1)**.** *Điều kiện cần và đủ để phương trình* (5) *có nghiệm là* $d \mid c$.

Định lí 5 ([6], Định lí 3.1)**.** *Nếu* (x_0, y_0) *là một nghiệm của phương trình* (5) *thì tập hợp các nghiệm* (*x, y*) *của phương trình* (5) *được xác định bởi hệ thức*

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}). \tag{6}$$

Nhận xét. Khi giải phương trình (5), trước tiên ta phải kiểm tra điều kiện có nghiệm. Nếu (5) có nghiệm thì ta chỉ cần tìm ra một nghiệm (x_0, y_0) của (5), từ đó kết luận tập hợp nghiệm theo công thức (6). Có một số cách tìm (x_0, y_0) như nhẩm nghiệm, biến đổi và suy luận, lập trình MTCT cho một biến chạy rồi quan sát giá trị của biến còn lại, dùng chức năng Table trên MTCT… Đối với phương trình có một trong các đặc điểm như hệ số *a, b* khá lớn, nghiệm là số lớn, khó tìm nghiệm, thì một số phương pháp nêu trên hầu như không hoặc rất khó áp dụng. Khi đó, chúng ta có thể dùng phương pháp biểu diễn $\frac{a}{b}$ thành liên phân số sau đó tính các giản phân và xác định $x_0=(-1)^{n+1}cQ_{n-1}, y_0=(-1)^n cP_{n-1}$ (xem [6]). Tuy nhiên, nếu dùng cách tính toán thủ công thì khi qua nhiều bước phức tạp sẽ bị mất nhiều thời gian và dễ bị sai số. Sau đây, chúng tôi đề xuất giải thuật MTCT để tìm một nghiệm bất kì (x_0, y_0) theo phương pháp này.

Bước 1. *Kiểm tra điều kiện để phương trình có nghiệm và phân tích $\frac{a}{b}$ thành liên phân số (hữu hạn).*

Sử dụng chức năng GCD để tìm ước chung lớn nhất *d* của a, b và kiểm tra xem *d* có là ước của *c* hay không. Nhập vào màn hình $c\div \mathrm{R}(\mathrm{GCD}(a,b))$, bấm "=". Nếu kết quả $\mathrm{R}=0$ thì *c* chia hết cho *d*, do đó (5) có nghiệm. Ngược lại, nếu $\mathrm{R}\neq 0$ thì (5) vô nghiệm.

Xét trường hợp (5) có nghiệm, ta đưa $\frac{a}{b}$ dạng về liên phân số hữu hạn $\frac{a}{b}=[q_0, q_1, q_2, .., q_n]$ (xem chi tiết ở Mục 2.2).

Bước 2. Tính liên phân số $[q_0, q_1, q_2, .., q_{n-1}]$ để xác định các giá trị Q_{n-1} và P_{n-1}. Tính liên phân số $[q_0, q_1, q_2, .., q_{n-1}]$ như sau (xem [3]):

Nhập q_{n-1} "=" (lưu q_{n-1} vào biến Ans). Nhập vào màn hình $\mathrm{Ans}^{-1}+E$.

CALC, *E*? Nhập q_{n-2} "=", CALC, *E*? Nhập q_{n-3} "=", CALC, *E*? Nhập q_{n-4} "=", …

CALC, *E*? và nhập giá trị liên tiếp như trên cho đến q_0. CALC, *E*? Nhập q_0 "=".

Ta được $[q_0, q_1, q_2, .., q_{n-1}]=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Ghi các giá trị P_{n-1}, Q_{n-1} ra giấy và bấm AC.

Nhập $(-1)^{n+1}cQ_{n-1}$, bấm "=" ta được x_0. Bấm AC.

Nhập $(-1)^n cP_{n-1}$, bấm "=" ta được y_0. Kết luận tập nghiệm của phương trình.

Ví dụ. Giải phương trình Điophant $1289x+237y=6$.

Giải. ***Bước 1.*** Kiểm tra điều kiện có nghiệm: Nhập vào màn hình $6\div \mathrm{R}(\mathrm{GCD}(1289,237))$, bấm "=", kết quả $\mathrm{R}=0$. Vậy phương trình có nghiệm.

Tiếp tục, phân tích $\frac{a}{b}=\frac{1289}{237}$ thành liên phân số (theo giải thuật ở Mục 2.2): Nhập vào màn hình $X=X+1$: $C=A\div \mathrm{R}B$: $D=A-CB$: $A=B$: $B=D$.

CALC, *X*? Nhập -1 "=", *A*? Nhập 1289 "=", *B*? Nhập 237=". Ta được $C=q_0=5$.

Bấm "=" "="… qua các vòng lặp tiếp theo ta thu được các giá trị của *C*, tức là tìm được $q_1=2, q_2=3, q_3=1, q_4=1, q_5=2, q_6=2, q_7=2$.

Vậy $\frac{a}{b}=[5; 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2]$.

Bước 2. Tính liên phân số [5; 2, 3, 1, 1, 2, 2] để xác định các giá trị Q_{n-1} và P_{n-1}.

Nhập giá trị 2, bấm "=". Nhập vào màn hình $\mathrm{Ans}^{-1}+E$.

CALC, *E*? Nhập 2 "=", CALC, *E*? Nhập 1 "=", CALC, *E*? Nhập 1"=",

CALC, *E*? Nhập 3 "=", CALC, *E*? Nhập 2 "=", CALC, *E*? Nhập 5 "=".

Ta được kết quả: $[5; 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2]=\frac{533}{98}$. Ghi các số 533, 98 ra giấy. Bấm phím AC.

Nhập vào màn hình $(-1)^{X+1}\times 6\times 98$, bấm "=", ta được $x_0=588$.

Bấm phím AC, nhập $(-1)^X\times 6\times 533$, bấm "=", ta được $y_0=-3198$.

Tập nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=588+237t \\ y=-3198-1289t \end{cases} (t\in\mathbb{Z})$.

Chú ý, ở Bước 1, biến *X* chỉ giữ vai trò là biến đếm trong giải thuật. Trong trường hợp này $X=7$ (do tính đến q_7) đã được lưu tự động trong máy sau khi kết thúc giải thuật.

Bài toán đề xuất. Giải phương trình Điophant $24694x+1213y=9$.

Kết quả: Tập nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=-981+1213t \\ y=19971-24694t \end{cases} (t\in\mathbb{Z}).$

2.4. Ứng dụng của liên phân số vô hạn tuần hoàn vào giải phương trình vô tỉ

MTCT là một công cụ hiệu quả trong việc giải phương trình vô tỉ. Gần đây, nhiều tác giả đã công bố nhiều giải thuật MTCT để định hướng lời giải cho các phương trình vô tỉ, tuy nhiên các tác giả chỉ giải quyết được một số dạng nhất định [2]. Trong mục này, chúng tôi đề xuất một phương pháp dùng MTCT để định hướng giải một dạng phương trình vô tỉ, đặc biệt phương pháp này hiệu quả đối với một số phương trình khó hoặc không thể giải theo cách thông thường.

Định nghĩa ([4]). Số vô tỉ α được gọi là *số vô tỉ bậc hai* nếu α là nghiệm của một tam thức bậc hai với hệ số nguyên.

Định lí 6 ([4], Định lí 3.1). *Mỗi số vô tỉ α có thể biểu diễn được thành liên phân số vô hạn tuần hoàn khi và chỉ khi nó là số vô tỉ bậc hai.*

Định lí 7 ([4], Bổ đề 3.3). *Nếu số vô tỉ bậc hai α là nghiệm của phương trình $Ax^2+Bx+C=0$ thì liên hợp của nó cũng là nghiệm của phương trình đó.*

Nhắc lại, nếu $\alpha=\dfrac{a+\sqrt{c}}{b}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z}, b\neq 0, c>0)$ thì số *liên hợp* của α là $\alpha'=\dfrac{a-\sqrt{c}}{b}$.

Nhận xét. Theo Định lí 6, khi sử dụng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình, nếu nghiệm α là vô tỉ (chỉ hiển thị được gần đúng trên màn hình) thì ta chỉ cần phân tích nó thành liên phân số để xem nó có là liên phân số tuần hoàn hay không. Trong mục này, chúng tôi chỉ nghiên cứu cách giải trong trường hợp nghiệm là liên phân số vô hạn tuần hoàn, tức nó là số vô tỉ bậc hai. Khi đó, nghiệm và nghiệm liên hợp của phương trình đang xét cũng chính là nghiệm của một phương trình bậc hai nào đó với hệ số nguyên. Tìm được phương trình bậc hai này sẽ cho ta cách đặt thừa số cho phương trình vô tỉ.

Ví dụ. Giải phương trình

$$3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0. \quad (7)$$

Nếu giải phương trình (7) bằng phương pháp thông thường là bình phương khai căn thì sẽ gặp khó khăn vì phương trình mới có số mũ lớn sẽ phức tạp hơn rất nhiều. Ngoài ra, dấu hiệu đặt ẩn phụ cho phương trình theo một số cách thông thường cũng không có. Do vậy, chúng tôi đề xuất phương pháp sử dụng MTCT. Khi sử dụng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình (7), bằng các phương pháp đã biết hiện tại ([2]), ta chỉ tìm được hai nghiệm là $x=0, x\approx 3,791287847$. Như vậy, với nghiệm $x=0$, vế trái phương trình có dạng $xf(x)$, tuy nhiên khó có thể phân tích để tìm $f(x)$. Khi đó, chúng ta nghĩ đến việc tìm nghiệm liên hợp của $x\approx 3,791287847$. Trong [2], các tác giả có đề xuất một số phương pháp tìm lượng liên hợp với nghiệm là số vô tỉ, nhưng việc đó chỉ thực hiện được khi trên máy tính ta tìm được gần đúng của hai nghiệm vô tỉ x_1 và x_2 là hai số vô tỉ liên hợp nhau. Phương pháp này không áp dụng được đối với phương trình (7) vì chức năng SOLVE trong trường hợp này chỉ giúp ta tìm được duy nhất một nghiệm vô tỉ. Sau đây, chúng tôi đề xuất một giải thuật máy tính mới giúp giải phương trình vô tỉ khi các phương pháp khác chỉ tìm được tối đa một nghiệm vô tỉ. Ý tưởng của phương pháp này là phân tích một nghiệm vô tỉ vừa tìm được thành liên phân số vô hạn tuần hoàn (trường hợp không tuần hoàn tạm thời chưa giải quyết được). Từ đó, ta có thể tìm được một tam thức bậc hai nhận hai nghiệm vô tỉ liên hợp nhau của phương trình. Bài toán trên được giải như sau.

Phân tích bài làm. Nhập vào màn hình $3\sqrt{5X+4}+3\sqrt{X+4}+4X^2-18X-12$. Bấm SHIFT SOLVE, *X*? Bấm "=" cho ta nghiệm $x=0, x\approx 3,791287847$.

Lưu $x\approx 3,791287847$ vào X (thao tác SHIFT STO *X*) và áp dụng giải thuật tìm liên phân số vô hạn. Bấm phím AC. Nhập $\text{Int}(X): X=\dfrac{1}{X-\text{Int}(X)}$, bấm CALC "=" "=" … liên tiếp, ta được liên phân số $x=3,791287847=[3;(1,3)]$ là liên phân số tuần hoàn, do đó cũng là số vô tỉ bậc hai.

Tiếp theo, ta giải bài toán phụ để tìm chính xác số vô tỉ bậc hai *x*. Ta có $x=[3;(1,3)]\Leftrightarrow x=[3;y]$ với $y=[1,3,y]$, do đó

$$y = 1 + \frac{1}{3+\frac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 + \frac{y}{3y+1}$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 3y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3\pm\sqrt{21}}{6}.$$

Khi đó, $x=3+\frac{1}{y}\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$. Áp dụng định lí Viet đảo ta được phương trình $x^2-3x-3=0$, chính là biểu thức sau khi liên hợp của $\sqrt{5x+4}$ và $\sqrt{x+4}$. Đặt

$$5x+4-(ax+b)^2 = k(x^2-3x-3)$$

$$\Leftrightarrow -ax^2+(5-2ab)x-b^2+4 = kx^2-3kx-3k.$$

Đồng nhất hệ số :

$$\begin{cases}-a=k\\5-2ab=-3k\\-b^2+4=-3k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-1\\a=1\\b=1\end{cases}$$

(chọn *k* sao cho *a, b* là số nguyên).

Vậy biểu thức cần thêm liên hợp là $\sqrt{5x+4}-(x+1)$.

Tương tự, biểu thức cần thêm liên hợp tiếp theo là $\sqrt{x+4}-(x-1)$.

Giải. Điều kiện $x\ge-\frac{4}{5}$. Thêm và bớt số hạng $(x+1)$ và $(x-1)$, ta có

$$(7)\Leftrightarrow 3\left[\sqrt{5x+4}-(x+1)\right]+3\left[\sqrt{x+4}-(x-1)\right]+4x^2-12x-12=0.$$

$$\Leftrightarrow(-x^2+3x+3)\left[\frac{3}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}+\frac{3}{\sqrt{x+4}+(x-1)}-4\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+3x+3=0\\ \dfrac{3}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}+\dfrac{3}{\sqrt{x+4}+(x-1)}-4=0.\end{array}\right.$$

Với $-x^2+3x+3=0$, ta có $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, so với điều kiện ta có $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Với $\frac{3}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}+\frac{3}{\sqrt{x+4}+(x-1)}-4=0.$

Xét hàm số

$$h(x)=\frac{3}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}+\frac{3}{\sqrt{x+4}+(x-1)}-4.$$

Ta có

$$h'(x)=-\frac{3\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+4}}+1\right)}{\left(\sqrt{5x+4}+(x+1)\right)^2}-\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}}+1\right)}{\left(\sqrt{x+4}+(x-1)\right)^2}<0,\ \forall x\ge-\frac{4}{5}.$$

Vậy $h(x)$ đơn điệu giảm. Vì $h(0)=0$ nên ta có $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên. Vậy phương trình (7) có hai nghiệm là $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ và $x=0$.

Nhận xét. Phương pháp trên có thể phát triển để áp dụng trong việc tìm hàm đặc trưng khi giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp hàm số.

Bài toán đề xuất. Giải phương trình $4x^2-26x+3(\sqrt{7x+4}+\sqrt{3x+4}-4)=0.$

Kết quả: $x=0,\ x=\frac{5+\sqrt{37}}{2}.$

3. Kết luận và kiến nghị

Bài báo đã nêu ra một số giải thuật mới chuyên sâu sử dụng một số chức năng mới trên máy tính Casio fx-570VN Plus để giải nhanh một số bài toán số học và đại số sơ cấp. Việc nghiên cứu sử dụng các giải thuật này không những nâng cao hiệu quả trong giải toán mà còn góp phần rèn tư duy giải thuật cho học sinh, sinh viên và hướng đến việc dạy học tích hợp các yếu tố tin học trong môn toán. Khi dạy cho người học áp dụng các giải thuật này, giáo viên cần giải thích rõ ràng cơ sở toán học của thuật toán, giải thích chi tiết cho học sinh các yếu tố có trong giải thuật nhằm giúp các em hiểu rõ, phát triển tư duy giải thuật và tránh sử dụng một cách máy móc. Kết quả bài báo có thể khai thác cho các cuộc thi học sinh giỏi toán về MTCT. Hướng phát triển của bài báo là tìm giải thuật máy tính để giải một số dạng phương trình đại số tổng quát hơn, một số dạng toán số học nâng cao khác.

Tài liệu tham khảo

[1]. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2016), *Danh sách máy tính cầm tay được đem vào phòng thi*, Số 2571/BGDĐT-CNTT, ban hành ngày 1 tháng 6 năm 2016, Hà Nội.

[2]. Đoàn Trí Dũng, Bùi Thế Việt (2015), *Phương pháp sử dụng máy tính Casio trong giải toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình*, NXB Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

[3]. Lê Trung Hiếu, Lê Văn Huy (2015), "Đề xuất một số giải thuật sử dụng phím CALC trong lập trình giải toán máy tính cầm tay", *Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, số (12 (78)), tr. 126-137.

[4]. Nguyễn Văn Mậu, Bùi Công Huấn, Đặng Hùng Thắng, Trần Nam Dũng, Đặng Huy Ruận (2004), *Một số chuyên đề toán học chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi*, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5]. H., Pomerantz (1997), *The role of calculators in math education*, Texas Instruments.

[6]. Nguyễn Tiến Tài (2007), *Giáo trình phương trình nghiệm nguyên,* NXB Đại học Sư phạm.

[7]. K. G. Tay (2006), *How to use calculator casio fx-570MS in numerical methods,* Penerbit UTHM.

[8]. Lại Đức Thịnh (1977), *Giáo trình số học,* NXB Giáo dục.

[9]. Lê Thái Bảo Thiên Trung (2011), "Vấn đề ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học toán và lợi ích của máy tính cầm tay", *Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, (số 30 (64)), tr. 51-58.

[10]. M. Y. Yasin (2012), "Scientific calculators and the skill of efficient Computation", *BIBECHANA: A multidisciplinary journal of science, technology and mathematics*, Vol. 8, p. 31-36.

SUGGESTING ALGORITHMS PROGRAMMED IN CASIO FX-570VN PLUS CALCULATOR FOR QUICKLY SOLVING SOME PRIMARY PROBLEMS

Summary

In this paper, we propose some new algorithms in the Casio fx-570VN Plus calculator for quickly solving some problems of successive fractions, equations with integer solutions, irrational equations. These programmed algorithms help reduce computing time, lessen errors and contribute to simplify procedures needed in comparison to the traditional ones. For each problem type, we provide detailed examples to illustrate the obtained results.

Keywords: Calculators, Casio fx-570VN Plus, programmed algorithms, successive fractions, Diophantine equations, irrational equations.

Ngày nhận bài: 15/12/2016; Ngày nhận lại: 07/3/2017; Ngày duyệt đăng: 10/4/2017.