KHÁM PHÁ KIẾN THỨC MỚI TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN NHỜ KHAI THÁC MỐI LIÊN HỆ VỚI HÌNH HỌC PHẲNG

• Đào Tam(*), Lương Văn Bổn(*)

Tóm tắt

Bài báo trình bày cách khai thác mối liên hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian, đặc biệt là mối liên hệ nhân quả, nhằm luyện tập cho học sinh cách huy động kiến thức để giải quyết vấn đề trong các tình huống tri thức mới [4]. Tư tưởng nghiên cứu trên của bài viết được cụ thể hóa trong dạy học hình học không gian ở trường trung học phổ thông. Từ đó giúp học sinh khắc phục một số khó khăn và chướng ngại trong hoạt động tìm tòi cách phát hiện giải quyết các vấn đề toán học [5].

Từ khóa: Khám phá, tri thức, hình học phẳng, hình học không gian, mối liên hệ nhân quả.

1. Đặt vấn đề

Khi dạy học hình học không gian, học sinh thường gặp những khó khăn chủ yếu như:

- Khó khăn trong việc kết nối kiến thức được học trong hình học phẳng với kiến thức của hình học không gian được nghiên cứu thông qua sử dụng các hình biểu diễn. Khó khăn trên thể hiện học sinh còn ngộ nhận các quan hệ không gian thành các quan hệ trong hình học phẳng. Khó khăn này gây nên do trí tưởng tượng không gian của học sinh còn yếu [3].

- Khó khăn trong việc hình dung các hình không gian qua các hình biểu diễn. Từ đó dẫn tới học sinh thường mắc sai lầm do bị chi phối bởi trực quan các quan hệ không gian trừu tượng [3].

Bài báo này trình bày một số phương thức gắn kết hình học phẳng với hình học không gian, giúp học sinh nâng cao khả năng phát hiện giải quyết có hiệu quả các vấn đề hình học không gian.

2. Nội dung nghiên cứu

Từ việc nghiên cứu mối liên hệ hình học phẳng và hình học không gian thông qua khảo sát các tính chất giữa các cặp đối tượng: đường thẳng và mặt phẳng; tam giác và tứ diện; hình bình hành và hình hộp; đường tròn và mặt cầu cho phép chúng ta kết luận các cặp đối tượng trên có nhiều tính chất tương tự, điều này có được là do các cặp đối tượng nói trên là trường hợp riêng của m - phẳng, m - đơn hình, m - cầu trong không gian Afin và không gian Euclid. Trong bài báo này chúng tôi khai thác các tính chất của bài toán không gian thông qua sử dụng các bài toán phẳng được cụ thể hóa qua các phương thức sau.

2.1. Phương thức 1: Khai thác các bộ phận phẳng của hình không gian then chốt liên quan trong bài toán nhằm chuyển bài toán hình học không gian về một số bài toán hình học phẳng quen thuộc

Khi chứng minh một bài toán hình học không gian chúng ta cần vẽ hình làm điểm tựa trực quan cho việc nhận định và tìm lời giải cho bài toán. Tuy nhiên, một bài toán hình học không gian có thể có nhiều hình vẽ phức tạp gây khó khăn trong việc tìm tòi lời giải [2]. Do đó, ta có thể tách các bộ phận phẳng của hình không gian trong bài toán nhằm chuyển bài toán không gian về tổ hợp các bài toán phẳng quen thuộc. Có thể minh họa điều nói trên qua các ví dụ sau.

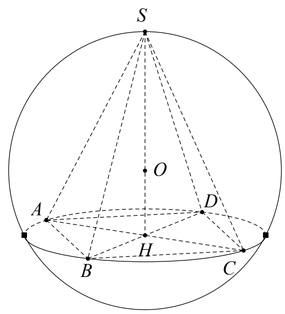
Ví dụ 1: *Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, đường cao $SH = h$. Hãy xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ ([1]).*

Trước khi giải bài toán này, học sinh cần lưu ý định nghĩa hình chóp đều được đề cập trong sách giáo khoa Hình học 11 (cơ bản) như sau: "Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy".

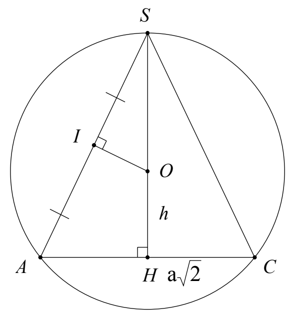
Cụ thể trong bài toán này là hình chóp tứ giác đều có đáy là một hình vuông và đường cao SH vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và H trùng với tâm của hình vuông $ABCD$ nên ta có hai nhận định sau: ***Thứ nhất***, trục SH chứa tất cả các điểm cách đều các điểm A, B, C, D nên

(*) Hội Giảng dạy toán học phổ thông Việt Nam.
(**) Học viên cao học, Trường Đại học Cần Thơ.

tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nằm trên SH. ***Thứ hai***, ta chỉ cần tìm điểm O nằm trên SH cách đều hai điểm S, A và O chính là giao điểm của SH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SA. Từ hai nhận định trên ta có hình biểu diễn sau (Hình 1).



Hình 1



Hình 2

Trong trường hợp này nếu dùng hình biểu diễn của hình không gian để tìm lời giải cho bài toán thì chúng ta không thể giúp học sinh tiếp cận được lời giải một cách nhanh chóng. Vì thế, ta nên tách các bộ phận phẳng then chốt liên quan đến việc tìm tâm O, đó chính là mặt phẳng (SAC) nhằm chuyển bài toán không gian về bài toán phẳng quen thuộc (Hình 2).

Như vậy, ta đã chuyển bài toán trên từ việc tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ sang tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC (Tam giác SAC cân tại S).

Theo định nghĩa hình chóp đều: $ABCD$ là hình vuông.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Từ đó suy ra mọi điểm trên SH cách đều 4 đỉnh A, B, C, D.

Như vậy, tâm của hình cầu sẽ nằm trên đường thẳng SH sao cho khoảng cách từ điểm đó đến điểm S bằng khoảng cách từ điểm đó đến điểm A (hoặc B, C, D).

* Xét ΔSAC

Đường trung trực của đoạn thẳng SA đi qua trung điểm I của SA cắt SH tại O.

Khi đó $OS = OA$.

Theo lí luận trên thì $OA = OB = OC = OD$.

Suy ra O là tâm của hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta đã xác định được tâm của hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Việc còn lại trong bài toán là tính bán kính của hình cầu này.

* Xét tam giác SAH vuông ở H, ta có

$SH = h$ (Giả thiết); $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

* Xét hai tam giác ΔSIO và ΔSHA, ta có

$\widehat{ISO}$ là góc chung; $\widehat{SIO} = \widehat{SHA} = 90^0$.

Suy ra ΔSIO và ΔSHA đồng dạng, hay $\dfrac{SI}{SH} = \dfrac{SO}{SA}$.

Suy ra $SO = \dfrac{SI.SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH}$.

Vậy $R = SO = \dfrac{1}{2}.\dfrac{h^2 + \frac{a^2}{2}}{h} = \dfrac{2h^2 + a^2}{4h}$. ■

**** Ta có thể tính bán kính của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABCD$ theo cách sau.***

Tam giác SAC là tam giác có ba đỉnh nằm trên hình cầu và chứa tâm hình cầu thì ta nói rằng mặt phẳng (SAC) cắt hình cầu theo đường tròn lớn chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.

$$R_{\Delta SAC} = R_{HC} = \frac{abc}{4S_{\Delta SAC}} = \frac{SA.SC.AC}{4.\frac{AC.SH}{2}} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{h^2 + \frac{a^2}{2}}{2h} = \frac{2h^2 + a^2}{4h}.$$

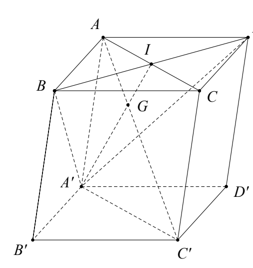
$R_{\Delta SAC}$: Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.

R_{HC}: Bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

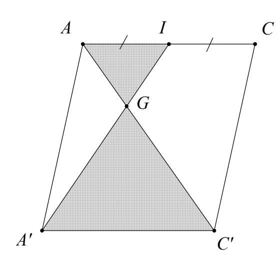
Ví dụ 2: *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.*

a) Tìm giao điểm G của đường thẳng AC' và mặt phẳng (BDA').

b) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác BDA'.



Hình 3



Hình 4

a) Tìm giao điểm G của đường thẳng AC' và mặt phẳng (BDA')

Chọn mặt phẳng $(ACC'A')$ chứa đường thẳng AC' (Hình 3).

Dễ thấy giao tuyến của hai mặt phẳng (BDA') và $(ACC'A')$ là đường thẳng $A'I$ (với I là tâm của hình bình hành $ABCD$).

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, gọi G là giao điểm của AC' và $A'I$.

Suy ra G là giao điểm của đường thẳng AC' và mặt phẳng (BDA').

b) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác BDA'

Ta có đường thẳng $A'I$ là đường trung tuyến của tam giác BDA'. Như vậy để chứng minh G là trọng tâm của tam giác BDA' ta cần chứng minh $GI = \frac{1}{2}GA'$. Chúng ta có thể tách các bộ phận phẳng ra khỏi hình hộp để việc chứng minh được dễ dàng hơn (Hình 4).

Xét hai tam giác đồng dạng AGI và $A'GC'$, ta có $\frac{GI}{GA'} = \frac{AI}{C'A'} = \frac{1}{2}$.

Suy ra G là trọng tâm của tam giác BDA'. ■

2.2. Phương thức 2: Tìm tòi lời giải bài toán hình học không gian thông qua khai thác các bài toán hình học phẳng nhờ sử dụng phép tương tự

Các bài toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả không những giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy mà còn hình thành kĩ năng, kĩ xảo và ứng dụng toán học vào thực tiễn [2]. Hoạt động giải bài tập toán học là điều kiện để thực hiện tốt các mục đích dạy học toán ở trường phổ thông. Vì vậy, tổ chức có hiệu quả các hoạt động hướng dẫn học sinh tìm tòi lời giải cho các bài tập toán có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán.

Do đặc thù của phân môn hình học không gian có tính trừu tượng và khái quát cao nên hệ thống bài tập hình học không gian rất đa dạng và phong phú, việc tiếp cận và vận dụng lý thuyết vào bài tập đối với học sinh còn gặp nhiều khó khăn. Để giúp học sinh định hướng và giải tốt các bài tập hình học không gian, một trong những phương thức giảng dạy đó là vận dụng tương tự hoá trong việc giải một số bài tập. Để làm rõ nội dung ý tưởng vừa nêu ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: *Cho tứ diện $ABCD$ với G là trọng tâm. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.*

Kiến thức đích (Giới thiệu kiến thức cần dạy)

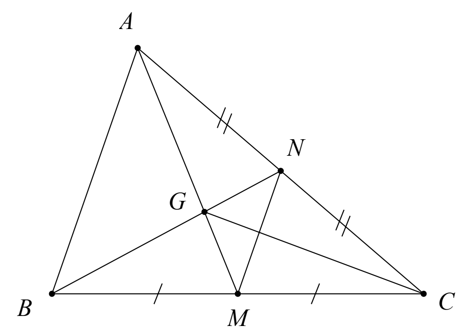
Yêu cầu bài toán tương tự với tính chất $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ với G là trọng tâm của tam giác ABC.

Kiến thức nguồn (Nhận biết các kiến thức quan trọng dùng làm tương tự)

Cho tam giác ABC có trọng tâm G chứng minh $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Giải bài toán hình học phẳng

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC (Hình 5).



Hình 5

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $GM = \frac{1}{2}GA.$

Mặt khác $\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{GA}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ hay $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}.$

Với M là trung điểm của BC ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$ nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}.$$

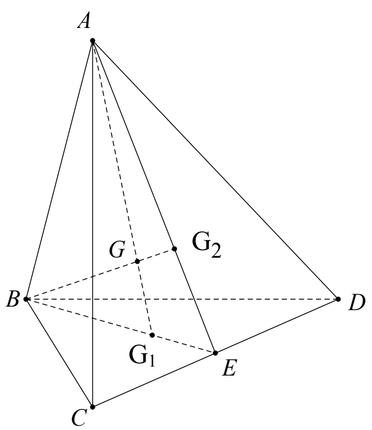
Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$ ■

Sự tương ứng giữa kiến thức nguồn và kiến thức đích

Kiến thức nguồn (Trong mặt phẳng)	**Kiến thức đích (Trong không gian)**
Tam giác ABC	Tứ diện $ABCD$
G là trọng tâm của tam giác	G là trọng tâm của tứ diện
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Giải bài toán hình học không gian

Gọi E là trung điểm của CD và G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và ADC (Hình 6).



Hình 6

Khi đó $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GG_1}$.

Ta xét tam giác ABE, ta có

$$\frac{EG_1}{EB}=\frac{EG_2}{EA}=\frac{1}{3}.$$

Suy ra $\frac{GG_1}{GA}=\frac{GG_2}{GB}=\frac{1}{3}$, hay $GA=3GG_1$.

Vì $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GG_1}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GG_1}$.

Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-3\overrightarrow{GG_1}+3\overrightarrow{GG_1}=\vec{0}. \quad \blacksquare$$

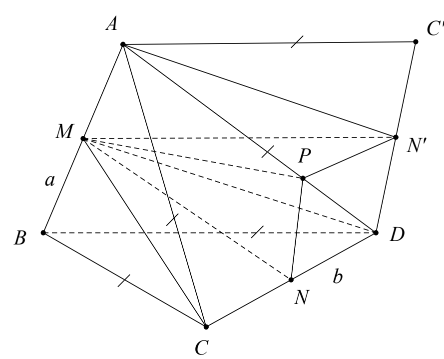
Như vậy, Ví dụ 3 đã làm rõ thêm về mối liên hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian. Chúng ta có thể sử dụng kiến thức trong hình học phẳng để tìm tòi lời giải và chứng minh bài toán hình học trong không gian thông qua phép tương tự.

2.3. Phương thức 3: Tìm tòi lời giải cho bài toán hình học không gian thông qua khai thác các bài toán hình học phẳng nhờ sử dụng phương pháp trải hình

Phương pháp trải hình là một trong những phương pháp hay trong giải toán hình học không gian. Phương pháp này giúp chúng ta tìm tòi phát hiện hướng giải cho bài toán hình học không gian. Nhiều bài toán hình học không gian được giải quyết dễ dàng bằng cách đưa về giải bài toán hình học phẳng thông qua hoạt động trải hình (hay khai triển hình). Đây là hoạt động khai triển các yếu tố không gian lên trên cùng một mặt phẳng, chuyển bài toán hình học không gian về bài toán hình học phẳng, gắn kết bài toán hình học phẳng và bài toán hình học không gian [4]. Cụ thể ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4: *Cho tứ diện $ABCD$ có: $AC=AD=BC=BD=1$; $AB=a$; $CD=b$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm trên cạnh AD một điểm P sao cho $PM+PN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.*

Theo dữ kiện bài toán ta có hình vẽ như sau (Hình 7).



Hình 7

Theo giả thiết điểm P, M, N thuộc hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) thì rất khó để học sinh có thể tìm được điểm P thuộc đường thẳng AD để $PM+PN$ nhỏ nhất. Như vậy, ta có thể sử dụng phương pháp trải hình để trải tam giác ACD theo trục AD lên mặt phẳng (ABD) thì điểm C' tương ứng điểm C, N' tương ứng điểm N để học sinh có thể khai thác và tìm tòi lời giải cho yêu cầu bài toán cụ thể như sau.

$DC = DC' = b$, $PN = PN'$.

Yêu cầu bài toán sẽ tương đương tìm $P \in AD$ sao cho $PM + PN'$ nhỏ nhất. Suy ra P là giao điểm của MN' và AD.

Khi đó: $(PM + PN')_{\min} = MN'$.

Và bây giờ chúng ta chỉ cần tính độ dài đoạn thẳng MN'. Ta dễ thấy:

Tam giác ABD cân ở D và M là trung điểm của AB suy ra $DM \perp AB$.

Tam giác $AC'D$ cân ở A và N' là trung điểm của DC' suy ra $DC' \perp AN'$.

Do đó tứ giác $AMDN'$ nội tiếp và có

$$AM = \frac{a}{2};\ DN' = \frac{b}{2};$$

$$AN' = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}};\ DM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

Áp dụng định lý Ptoleme, ta có

$$MN' = \frac{DN'.AM + DM.AN'}{AD}$$

$$\Rightarrow MN' = \frac{b}{2}.\frac{a}{2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}}.\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow MN' = \frac{ab + \sqrt{\left(4 - a^2\right)\left(4 - b^2\right)}}{4}.$$

Vậy điểm P cần tìm trên cạnh AD là giao điểm của MN' và AD. Khi đó

$$(PM + PN)_{\min} = (PM + PN')_{\min} = MN' = \frac{ab + \sqrt{\left(4 - a^2\right)\left(4 - b^2\right)}}{4}. \blacksquare$$

3. Kết luận

Trên đây chúng tôi đã xét một vài phương thức và hoạt động khai thác mối liên hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian nhằm kết nối những tri thức của hình học phẳng với hình học không gian mà lâu nay trong dạy học toán còn bộc lộ nhiều khó khăn với học sinh. Chúng ta có thể mở rộng ở các phạm vi khác trong môn toán hay giúp học sinh kết nối những tri thức toán học lại với nhau.

Tài liệu tham khảo

[1]. Trần Văn Hạo (Chủ biên), Nguyễn Cam, Nguyễn Mộng Hy, Trần Đức Huyên, Cam Duy Lễ, Nguyễn Sinh Nguyên, Nguyễn Vũ Thanh (2001), *Chuyên đề luyện thi vào đại học - Hình học không gian*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[2] Polya G (2010), *Sáng tạo toán học (Nguyễn Sỹ Tuyển, Phan Tất Đắc, Hồ Thuần, Nguyễn Giản dịch)*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3]. Đào Tam (2005), *Phương pháp dạy học hình học ở trường trung học phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[4]. Đào Tam (Chủ biên), Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn toán ở trường trung học phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội

[5]. Đào Tam (2016), "Mở rộng khả năng cách giải quyết vấn đề qua khai thác mối liên hệ bên trong giữa các nội dung toán học ở trường phổ thông", *Tạp chí Toán học trong nhà trường,* (số 4), tr. 1-3.

DISCOVERING NEW KNOWLEDGE IN TEACHING SOLID GEOMETRY BY EXPLOITING RELATIONSHIPS WITH PLANE GEOMETRY

Summary

The article presents the way to exploit relationships between plane geometry and solid geometry, especially the causal relationship, in order to train students how to mobilize knowledge for solving problems in new knowledge situations [4]. This instructional approach has been specified in teaching soild geometry at high school. Thereby, it helps students overcome some difficulties, obstacles and discover ways to solve math problems [5].

Keywords: Discover, knowledge, plane geometry, solid geometry, causal relationship.

Ngày nhận bài: 13/6/2016; Ngày nhận lại: 04/8/2016; Ngày duyệt đăng: 19/8/2016.