ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA ÁNH XẠ (ψ, S, C)-CO YẾU TỔNG QUÁT TRONG KHÔNG GIAN 2-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

• Nguyễn Trung Hiếu(*), Lê Thị Chắc(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu, (ψ, S, C)-co yếu tổng quát trong không gian 2-mêtric sắp thứ tự và thiết lập một số định lí điểm bất động chung cho hai lớp ánh xạ này. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả chính trong [4] và [7]. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động chung, ánh xạ bảo toàn thứ tự tăng yếu theo T, ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu tổng quát, không gian 2-mêtric đầy đủ theo quỹ đạo.

1. Giới thiệu

Trong Lí thuyết điểm bất động, Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ là kết quả cơ bản nhất. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu những mở rộng của nguyên lí này cho những lớp không gian khác nhau cũng như cho những lớp ánh xạ khác nhau. Trong hướng mở rộng cho không gian suy rộng, nhiều tác giả đã giới thiệu những không gian mêtric suy rộng như không gian b-mêtric, không gian G-mêtric, không gian S-mêtric, không gian 2-mêtric… và thiết lập những kết quả về điểm bất động và điểm bất động chung trong những không gian mêtric suy rộng này.

Bên cạnh việc xây dựng không gian mêtric suy rộng, nhiều tác giả đã xây dựng những điều kiện co suy rộng [8]. Năm 1972, Chatterjea [2] đã giới thiệu một khái niệm ánh xạ co suy rộng và được gọi là ánh xạ C-co. Khái niệm này được Choudhury [3] tổng quát thành khái niệm C-co yếu tổng quát trên không gian mêtric và được Harjani và các cộng sự [6] khảo sát trên không gian mêtric sắp thứ tự. Sau đó, Chandok [1] đã tổng quát khái niệm C-co yếu tổng quát thành khái niệm ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian mêtric sắp thứ tự. Năm 2013, Dung và cộng sự [4] đã mở rộng khái niệm ánh xạ C-co yếu trong không gian mêtric thứ tự sang không gian 2-mêtric và thiết lập một số kết quả về điểm bất động cho lớp ánh xạ mới này. Năm 2014, Nashine [7] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu trên không gian mêtric sắp thứ tự và đạt được một số kết quả về điểm bất động chung cho loại ánh xạ này.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng khái niệm ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu, ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu tổng quát trong không gian mêtric sắp thứ tự trong bài báo [7] sang không gian 2-mêtric sắp thứ tự và thiết lập một số định lí điểm bất động chung cho hai lớp ánh xạ mới này. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1 ([5]). Cho X là tập hợp khác rỗng và $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ là ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) Với hai điểm phân biệt $x, y \in X$, tồn tại điểm $z \in X$ sao cho $d(x,y,z) \neq 0$.

(2) Nếu có ít nhất hai trong số ba điểm x, y, z trùng nhau thì $d(x,y,z) = 0$.

(3) $d(x,y,z) = d(x,z,y) = d(y,x,z) = d(y,z,x) = d(z,x,y) = d(z,y,x)$ với $x, y, z \in X$.

(4) $d(x,y,z) \leq d(x,y,t) + d(y,z,t) + d(z,x,t)$ với $x, y, z, t \in X$.

Khi đó, d được gọi là 2-*mêtric* trên X và (X,d) được gọi là *không gian* 2-*mêtric*.

Nhận xét 1.2 ([4]). Từ Định nghĩa 1.1, ta có mọi 2-mêtric là không âm và mọi không gian 2-mêtric đều có ít nhất ba điểm phân biệt.

Định nghĩa 1.3 ([5]). Cho (X,d) là không gian 2-mêtric và $\{x_n\}$ là dãy trong X. Khi đó,

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ đến* $x \in X$, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x, a) = 0$ với mọi $a \in X$.

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* trong X nếu $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, a) = 0$ với mọi $a \in X$.

(3) Không gian (X,d) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh bổ đề được sử dụng trong chứng minh kết quả chính của bài báo.

Bổ đề 1.4. *Cho (X,d) là không gian 2-mêtric và $\{x_n\}$ là dãy trong (X,d). Khi đó, hai khẳng định sau là tương đương.*

(1) *$\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X,d).*

(2) *$\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong (X,d) và $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}, a) = 0$ với mọi $a \in X$.*

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$. Do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X,d) nên $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong (X,d) và $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}, a) = 0$ với mọi $a \in X$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Với $n, m \in \mathbb{N}$, ta chỉ cần xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1. $n = 2k+1, m = 2l$ với $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó, với mọi $a \in X$, ta có

$$d(x_n, x_m, a) = d(x_{2k+1}, x_{2l}, a) \le d(x_{2k+1}, x_{2l}, x_{2k}) + d(x_{2k}, x_{2l}, a) + d(x_{2k+1}, x_{2k}, a).$$

Trường hợp 2. $n = 2k, n = 2l+1$ với $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó, với mọi $a \in X$, ta có

$$d(x_n, x_m, a) = d(x_{2k}, x_{2l+1}, a) \le d(x_{2k}, x_{2l+1}, x_{2l}) + d(x_{2k}, x_{2l}, a) + d(x_{2l}, x_{2l+1}, a).$$

Trường hợp 3. $n = 2k+1, n = 2l+1$ với $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó, với mọi $a \in X$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m, a) &= d(x_{2k+1}, x_{2l+1}, a) \\ &\le d(x_{2k+1}, x_{2l+1}, x_{2l}) + d(x_{2l}, x_{2l+1}, a) + d(x_{2k+1}, x_{2l}, a) \\ &\le d(x_{2k+1}, x_{2l+1}, x_{2l}) + d(x_{2l}, x_{2l+1}, a) + d(x_{2k+1}, x_{2l}, x_{2k}) \\ &\quad + d(x_{2k}, x_{2l}, a) + d(x_{2k+1}, x_{2k}, a). \end{aligned}$$

Từ ba trường hợp trên, kết hợp với các giả thiết trong (2), ta suy ra $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, a) = 0$ với mọi $a \in X$. Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X,d). □

Định nghĩa 1.5 ([7]). Cho $(X, \preceq)$ là tập sắp thứ tự và $S, T : X \to X$ là hai ánh xạ. Khi đó, ánh xạ S được gọi là *bảo toàn thứ tự tăng yếu theo T* nếu $Sx \preceq TSx \preceq STSx$ với mọi $x \in X$.

Bằng cách tương tự với các khái niệm trong [7, Definition 1.6] và [7, Definition 2.4], chúng tôi giới thiệu các khái niệm sau:

Định nghĩa 1.6. Cho (X,d) là không gian 2-mêtric và cặp ánh xạ $S, T : X \to X$. Khi đó,

(1) Với $x_0 \in X$, xét dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho $x_{2n+1} = Sx_{2n}, x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ với $n \in \mathbb{N}$. Tập $O(x_0, S, T) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ được gọi là *quỹ đạo của (S,T) tại x_0*.

(2) Không gian (X,d) được gọi là *(S,T)-quỹ đạo đầy đủ tại x_0* nếu với mọi dãy Cauchy trong $O(x_0, S, T)$ hội tụ trong X. Lưu ý rằng ta viết $O(x_0, T)$ thay cho $O(x_0, S, T)$ khi $S = T$.

(3) Ánh xạ T được gọi là *liên tục theo quỹ đạo tại x_0* nếu nó liên tục trên $O(x_0; T)$.

Định nghĩa 1.7. Cho $(X, d, \preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự. Khi đó, $(X, d, \preceq)$ được gọi là *chính quy* nếu $\{z_n\}$ là dãy tăng trên X và $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ thì $z_n \preceq z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2. Các kết quả chính

Kí hiệu Ψ_1 là tập hợp các hàm số $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tăng, liên tục và $\psi(t) \le \frac{1}{2}t$ với mọi $t > 0$. Lưu ý rằng $\psi(0) = 0$. Kí hiệu Φ_1 là tập hợp các hàm số $\varphi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ giảm, liên tục, $\varphi(x,y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y = 0$ và $\varphi(x,y) \le x + y$ với mọi $x, y \in [0,\infty)$.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu trên không gian 2-mêtric sắp thứ tự.

Định nghĩa 2.1. Cho $(X, d, \preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự, $x_0 \in X$ và hai ánh xạ $T, S : X \to X$. Khi đó, T và S được gọi là *(ψ, S, C)-co yếu tại x_0* nếu tồn tại $\psi \in \Psi_1$ và $\varphi \in \Phi_1$ sao cho

$$d(Tx, Sy, a) \le \psi[d(x, Sy, a) + d(y, Tx, a) - \varphi(d(x, Sy, a), d(y, Tx, a))] \quad (2.1)$$

với mọi $a \in X$ và mọi $x, y \in \overline{O(x_0, S, T)}$ mà $x \preceq y$ hoặc $y \preceq x$.

Bổ đề 2.2. *Cho $(X, d, \preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự và hai ánh xạ $T, S : X \to X$ là (ψ, S, C)-co yếu. Khi đó, nếu z là điểm bất động của S hoặc T thì z là điểm bất động chung của S và T.*

Chứng minh. Giả sử z là điểm bất động của S. Từ điều kiện (2.1), ta được

$$d(Tz, z, a) = d(Tz, Sz, a) \le \psi[d(z, Sz, a) + d(z, Tz, a) - \varphi(d(z, Sz, a), d(z, Tz, a))]$$
$$\le \frac{1}{2}(d(z, Tz, a) - \varphi(0, d(z, Tz, a))).$$

Điều này dẫn đến $\varphi(0, d(z, Tz, a)) = 0$ với mọi $a \in X$. Suy ra $d(z, Tz, a) = 0$ với mọi $a \in X$ hay $z = Tz$. Suy ra z là điểm bất động của T.

Tương tự, nếu z là điểm bất động của T thì z cũng là điểm bất động của S. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lí về sự tồn tại và duy nhất điểm bất động chung của lớp ánh xạ (ψ, S, C)-co yếu trong không gian 2-mêtric.

Định lí 2.3. *Cho $(X, d, \preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự và hai ánh xạ $T, S : X \to X$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại x_0 sao cho $x_0 \preceq Sx_0$.

(2) Ánh xạ T và S là (ψ, S, C)-co yếu tại x_0.

(3) S bảo toàn thứ tự tăng yếu theo T.

(4) X là (S, T)-quỹ đạo đầy đủ tại x_0.

(5) S hoặc T liên tục theo quỹ đạo, hoặc $(X, d, \preceq)$ chính quy.

Khi đó, T và S có điểm bất động chung. Hơn nữa, tập các điểm bất động của T, S sắp thứ tự tốt nếu và chỉ nếu T và S có duy nhất điểm bất động chung.

Chứng minh. Với $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 \preceq Sx_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong X như sau:

$$x_{2n+1} = Sx_{2n} \text{ và } x_{2n+2} = Tx_{2n+1} \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Từ giả thiết S bảo toàn thứ tự tăng yếu theo T, ta chứng minh được

$$x_0 \preceq x_1 \preceq \ldots \preceq x_n \preceq x_{n+1} \preceq \ldots \qquad (2.2)$$

Từ (2.2) ta có $x_{2n-1} \preceq x_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó từ (2.1), ta được

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) = d(Tx_{2n-1}, Sx_{2n}, a)$$
$$\le \psi[d(x_{2n-1}, Sx_{2n}, a) + d(x_{2n}, Tx_{2n-1}, a) - \varphi(d(x_{2n-1}, Sx_{2n}, a), d(x_{2n}, Tx_{2n+1}, a))]$$
$$\le \frac{1}{2}[d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, a) - \varphi(d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, a), 0)]. \qquad (2.3)$$

Suy ra

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) \le \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, a). \qquad (2.4)$$

Chọn $a = x_{2n-1}$ trong (2.4), ta được

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n-1}) \le \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, x_{2n-1}) = 0.$$

Suy ra

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n-1}) = 0. \qquad (2.5)$$

Từ (2.4) và (2.5), ta được

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) \le \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, a)$$
$$\le \frac{1}{2}(d(x_{2n-1}, x_{2n}, a) + d(x_{2n}, x_{2n+1}, a)). \qquad (2.6)$$

Điều này dẫn đến với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) \le d(x_{2n-1}, x_{2n}, a) \qquad (2.7)$$

Tương tự với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta cũng có

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \le d(x_{2n}, x_{2n+1}, a) \qquad (2.8)$$

Từ (2.7), (2.8) ta suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(x_n, x_{n+1}, a) \le d(x_{n-1}, x_n, a) \qquad (2.9)$$

Do đó, $\{d(x_n, x_{n+1}, a)\}$ là dãy giảm, không âm với mọi $a \in X$. Khi đó, tồn tại số thực $r \ge 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}, a) = r. \qquad (2.10)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.6) và sử dụng (2.10), ta được

$$r \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, a) \le \frac{1}{2}(r + r) = r.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n-1}, x_{2n+1}, a) = 2r. \qquad (2.11)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.3), sử dụng (2.10), (2.11) và tính liên tục dưới của φ, ta được $r \le \dfrac{2r - \varphi(2r, 0)}{2} = r - \dfrac{1}{2}\varphi(2r, 0)$. Điều này dẫn đến $\varphi(2r, 0) = 0$. Suy ra $r = 0$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}, a) = 0. \qquad (2.12)$$

Từ (2.9), nếu $d(x_{n-1}, x_n, a) = 0$ thì $d(x_n, x_{n+1}, a) = 0$. Do $d(x_0, x_1, x_0) = 0$ nên

$d(x_n, x_{n+1}, x_0) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $d(x_{m-1}, x_m, x_m) = 0$ nên với mọi $n \geq m-1$,

$$d(x_n, x_{n+1}, x_m) = 0 \quad (2.13)$$

Với mọi $0 \leq n < m-1$, ta có $m-1 \geq n+1$. Do đó, từ (2.13) ta được

$$d(x_{m-1}, x_m, x_{n+1}) = d(x_{m-1}, x_m, x_n) = 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}, x_{m-1}) + d(x_{n+1}, x_m, x_{m-1}) + d(x_m, x_n, x_{m-1}) \\ &= d(x_n, x_{n+1}, x_{m-1}). \end{aligned}$$

Suy ra với mọi $0 \leq n < m-1$,

$$d(x_n, x_{n+1}, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}). \quad (2.14)$$

Vì $d(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ nên từ (2.14) ta có với mọi $0 \leq n < m-1$,

$$d(x_n, x_{n+1}, x_m) = 0. \quad (2.15)$$

Từ (2.13) và (2.15), ta được $d(x_n, x_{n+1}, x_m) = 0$ với mọi $n, m \in \mathbb{N}$. Khi đó, với mọi $i, j, k \in \mathbb{N}$ mà $i < j$, ta được

$$d(x_{j-1}, x_j, x_i) = d(x_{j-1}, x_j, x_k) = 0.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j, x_k) &\leq d(x_i, x_j, x_{j-1}) + d(x_j, x_k, x_{j-1}) + d(x_k, x_i, x_{j-1}) \\ &= d(x_k, x_i, x_{j-1}) \leq \ldots \leq d(x_i, x_i, x_k) = 0. \end{aligned}$$

Suy ra với mọi $i, j, k \in \mathbb{N}$, ta có

$$d(x_i, x_j, x_k) = 0. \quad (2.16)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do (2.12) và Bổ đề 1.4 nên ta chỉ cần chứng minh $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy. Giả sử ngược lại, $\{x_{2n}\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và hai dãy con $\{x_{2n(k)}\}, \{x_{2m(k)}\}$ của $\{x_{2n}\}$ sao cho $n(k)$ là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn $n(k) > m(k) > k$ với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$ và

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, a) > \varepsilon. \quad (2.17)$$

Điều này dẫn đến

$$d(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)}, a) \leq \varepsilon. \quad (2.18)$$

Từ (2.16) và (2.18), ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, a) &\leq d(x_{2n(k)}, x_{2n(k)-2}, a) + d(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)}, a) \\ &\leq d(x_{2n(k)}, x_{2n(k)-2}, a) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.19) và sử dụng (2.12), ta được

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, a) = \lim_{n\to\infty} d(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)}, a) = \varepsilon. \quad (2.20)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned} &d(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)}, a) \\ &\leq d(x_{2n(k)-2}, x_{2n(k)-1}, a) + d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1}, a) + d(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}, a) \end{aligned} \quad (2.21)$$

và

$$\begin{aligned} &d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1}, a) \\ &\leq d(x_{2n(k)-1}, x_{2n(k)-2}, a) + d(x_{2n(k)-2}, x_{2m(k)}, a) + d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}, a). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.21), (2.22) và sử dụng (2.12), (2.20), ta được

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1}, a) = \varepsilon. \quad (2.23)$$

Từ (2.1) và (2.16), ta được

$$\begin{aligned} &d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, a) \\ &\leq d(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}, a) + d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)+1}, a) \\ &= d(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}, a) + d(Tx_{2n(k)-1}, Sx_{2m(k)}, a) \\ &\leq d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}, a) + \psi(d(x_{2n(k)-1}, Sx_{2m(k)}, a) + d(x_{2m(k)}, Tx_{2n(k)-1}, a) \\ &\quad - \varphi(d(x_{2n(k)-1}, Sx_{2m(k)}, a), d(x_{2m(k)}, Tx_{2n(k)-1}, a)) \\ &\leq d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}, a) + \frac{1}{2}[d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1}, a) + d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, a) \\ &\quad - \varphi(d(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)+1}, a), d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, a)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.24), sử dụng (2.12), (2.20), (2.23) và tính liên tục của φ, ta được $\varepsilon \leq \varepsilon - \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon, \varepsilon)$. Suy ra $\varphi(\varepsilon, \varepsilon) \leq 0$. Điều này mâu thuẫn với $\varepsilon > 0$. Vậy $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $\overline{O(x_0, S, T)}$. Do X là (S,T)-quỹ đạo đầy đủ nên tồn tại $z \in \overline{O(x_0, S, T)}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.

Giả sử T hoặc S liên tục theo quỹ đạo. Nếu T liên tục theo quỹ đạo thì

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n+1} = T(\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}) = Tz.$$

Do đó, z là điểm bất động của T. Theo Bổ đề 2.2, ta có T và S có điểm bất động chung là z.

Tương tự, nếu S là liên tục theo quỹ đạo thì T và S có điểm bất động chung là z.

Giả sử $(X, d, \preceq)$ chính quy. Suy ra $x_{2n+1} \preceq z$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, theo điều kiện (2.1) ta được

$$\begin{aligned} &d(x_{2n+2}, Sz, a) \\ &= d(Tx_{2n+1}, Sz, a) \\ &\leq \psi(d(x_{2n+1}, Sz, a) + d(z, x_{2n+2}, a) - \varphi(d(x_{2n+1}, Sz, a), d(z, x_{2n+2}, a))) \\ &\leq \frac{1}{2}[d(x_{2n+1}, Sz, a) + d(z, x_{2n+2}, a) - \varphi(d(x_{2n+1}, Sz, a), d(z, x_{2n+2}, a))]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.25), sử dụng $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ và tính liên tục của ψ và φ, ta được

$$d(z,Sz,a) \le \frac{1}{2}(d(z,Sz,a) - \varphi(d(z,Sz,a),0)) \le \frac{1}{2} d(z,Sz,a).$$

Suy ra $d(z,Sz,a) = 0$ với mọi $a \in X$ hay $Sz = z$. Điều này có nghĩa là z là điểm bất động của S. Theo Bổ đề 2.2, ta có T và S có điểm bất động chung.

Bây giờ, giả sử tập hợp điểm bất động chung của S và T sắp thứ tự tốt. Ta cần chứng minh S và T có điểm bất động chung duy nhất. Giả sử u, v là điểm bất động chung của S và T tức là $Su = Tu = u$ và $Sv = Tv = v$. Vì tập hợp điểm bất động chung của S và T sắp thứ tự tốt nên u và v so sánh được. Khi đó, theo điều kiện (2.1), với mọi $a \in X$ ta có

$$\begin{aligned} d(u,v,a) &= d(Tu,Sv,a) \\ &\le \psi[d(u,Sv,a) + d(v,Tu,a) - \varphi(d(u,Sv,a),d(v,Tu,a))] \\ &\le d(u,v,a) - \frac{1}{2}\varphi(d(u,v,a),d(v,u,a)). \end{aligned}$$

Suy ra $\varphi(d(u,v,a),d(v,u,a)) = 0$. Điều này dẫn đến $d(u,v,a) = 0$ với mọi $a \in X$ hay $u = v$. Ngược lại, nếu T và S có điểm bất động chung duy nhất thì tập hợp điểm bất động chung của T và S là tập chỉ có một phần tử nên sắp thứ tự tốt. □

Bằng cách chọn $\psi(t) = \frac{t}{2}$ với $t \ge 0$ và $S = T$, từ Định lí 2.3 ta nhận được một mở rộng của [4, Theorem 2.3] như sau:

Hệ quả 2.4. *Cho $(X,d,\preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại x_0 sao cho $x_0 \preceq Tx_0$.

(2) Tồn tại hàm $\varphi \in \Phi_1$ sao cho

$$d(Tx,Ty,a) \le \frac{1}{2}[d(x,Ty,a) + d(y,Tx,a) - \varphi(d(x,Ty,a),d(y,Tx,a))]$$

với mọi $a \in X$ và mọi $x, y \in \overline{O(x_0,T)}$ mà $x \preceq y$ hoặc $y \preceq x$.

(3) $Tx \preceq T(Tx)$ với mọi $x \in X$.

(4) X là T-quỹ đạo đầy đủ tại x_0.

(5) T liên tục theo quỹ đạo hoặc $(X,d,\preceq)$ chính quy.

Khi đó, T có điểm bất động. Hơn nữa, tập các điểm bất động của T sắp thứ tự tốt khi và chỉ khi T có điểm bất động duy nhất.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ (ψ,S,C)-co yếu tổng quát trên không gian 2-mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ này. Kí hiệu Ψ_2 là tập hợp các hàm $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tăng, liên tục và $\psi(t) \le \frac{1}{4}t$ với mọi $t > 0$. Lưu ý rằng $\psi(0) = 0$. Kí hiệu Φ_2 là tập hợp các hàm $\varphi : [0,\infty)^4 \to [0,\infty)$ giảm, liên tục, $\varphi(x,y,z,t) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y = z = t = 0$ và $\varphi(x,y,z,t) \le x + y + z + t$ với mọi $x, y, z, t \in [0,\infty)$.

Định nghĩa 2.5. Cho $(X,d,\preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự, $x_0 \in X$ và cặp ánh xạ $T, S : X \to X$. Khi đó, T, S được gọi là *(ψ,S,C)-co yếu tổng quát tại x_0* nếu tồn tại $\psi \in \Psi_2$ và $\varphi \in \Phi_2$ sao cho

$$\begin{aligned} d(Tx,Sy,a) \le \psi[&d(x,Tx,a) + d(y,Sy,a) + d(x,Sy,a) + d(y,Tx,a) \\ &- \varphi(d(x,Tx,a),d(y,Sy,a),d(x,Sy,a),d(y,Tx,a))] \quad (2.26) \end{aligned}$$

với mọi $a \in X$ và với mọi $x, y \in \overline{O(x_0,S,T)}$ mà $x \preceq y$ hoặc $y \preceq x$.

Bằng cách lập luận tương tự như trong chứng minh Bổ đề 2.2 và Định lí 2.3, ta nhận được kết quả về sự tồn tại và duy nhất điểm bất động chung của lớp ánh xạ (ψ,S,C)-co yếu tổng quát trong không gian 2-mêtric như sau:

Bổ đề 2.6. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian 2-mêtric sắp thứ tự và hai ánh xạ $T, S : X \to X$ là (ψ,S,C)-co yếu tổng quát. Khi đó, nếu z là điểm bất động của T hoặc S thì z là điểm bất động chung của T và S.*

Định lí 2.7. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian 2-mêtric sắp thứ tự và hai ánh xạ $T, S : X \to X$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại x_0 sao cho $x_0 \preceq Sx_0$.

(2) Ánh xạ T, S là (ψ,S,C)-co yếu tổng quát $x_0 \in X$.

(3) X là (S,T)-quỹ đạo đầy đủ tại x_0.

(4) S bảo toàn thứ tự tăng yếu theo T.

(5) T hoặc S liên tục theo quỹ đạo, hoặc $(X,d,\preceq)$ chính quy.

Khi đó, T và S có điểm bất động chung. Hơn nữa, tập các điểm bất động của T,S sắp thứ tự tốt nếu và chỉ nếu S và T có duy nhất điểm bất động chung.

Bằng cách chọn $S=T$ trong Định lí 2.7, ta nhận được hệ quả sau:

Hệ quả 2.8. *Cho $(X,d,\preceq)$ là không gian 2-mêtric sắp thứ tự và ánh xạ $T:X\to X$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $x_0\preceq Tx_0$.

(2) Tồn tại hàm $\psi\in\Psi_2$ và $\varphi\in\Phi_2$ sao cho

$$d(Tx,Ty,a)\le\psi[d(x,Tx,a)+d(y,Ty,a)+d(x,Ty,a)+d(y,Tx,a)$$
$$-\varphi(d(x,Tx,a),d(y,Ty,a),d(x,Ty,a),d(y,Tx,a))]$$

với mọi $a\in X$ và *với mọi $x,y\in\overline{O(x_0,S,T)}$ mà $x\preceq y$ hoặc $y\preceq x$.*

(3) X là T-quỹ đạo đầy đủ tại x_0.

(4) T là liên tục theo quỹ đạo hoặc $(X,d,\preceq)$ chính quy.

(5) $Tx\preceq T(Tx)$ với mọi $x\in X$.

Khi đó, T có điểm bất động. Hơn nữa, tập các điểm bất động của T là tập sắp thứ tự tốt khi và chỉ khi T có điểm bất động duy nhất.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Ví dụ sau là một minh họa về sự tồn tại điểm bất động chung của hai ánh xạ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.3.

Ví dụ 2.9. Cho $X=\{1,2,3\}$ với quan hệ thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ và 2-mêtric d trên X được xác định bởi

$$d(x,y,z)=\min\left\{|x-y|,|y-z|,|z-x|\right\}.$$

Khi đó, (X,d) là không gian 2-mêtric sắp thứ tự đầy đủ. Xét cặp ánh xạ $T,S:X\to X$ xác định bởi

$$T1=T2=T3=1, S1=S2=1, S3=2.$$

Xét hàm $\psi(t)=\frac{1}{3}t$ với mọi $t\ge 0$ và hàm $\varphi(a,b)=\frac{1}{2}(a+b)$ với $a,b\ge 0$. Lấy $x_0=1$, ta có $O(x_0;S,T)=\{1\}$ và $\overline{O(x_0;S,T)}=\{1\}$. Khi đó, với mọi $x,y\in\overline{O(x_0;S,T)}$ và với mọi $a\in X$, ta có

$$d(Tx,Sy,a)=d(T1,S1,1)=d(1,1,1)=0$$

và

$$\psi(d(x,Sy,a)+d(y,Tx,a)-\varphi(d(x,Sy,a),d(y,Tx,a)))$$
$$=\frac{1}{6}(d(1,1,a)+d(1,1,a))=0.$$

Do đó, T,S là cặp ánh xạ (ψ,S,C) -co yếu. Hơn nữa, các giả thiết còn lại trong Định lí 2.3 đều thỏa mãn. Vì vậy, Định lí 2.3 áp dụng được cho cặp ánh xạ T,S.

Ví dụ sau chứng tỏ rằng Hệ quả 2.4 là sự tổng quát của kết quả chính trong [4].

Ví dụ 2.10. Cho $X=\{1,2,3,4\}$ với quan hệ thứ tự $\preceq$ xác định bởi: $x\preceq y$ nếu $x\ge y$ theo thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ và 2-mêtric d trên X được xác định bởi

$$d(x,y,z)=\begin{cases}0 \text{ nếu } x=y \text{ hoặc } y=z \text{ hoặc } z=x \text{ hoặc } \{x,y,z\}=\{1,2,3\} \text{ hoặc } \{1,2,4\}\\ 1 \text{ nếu } \{x,y,z\}=\{1,3,4\} \text{ hoặc } \{2,3,4\}.\end{cases}$$

Khi đó, (X,d) là không gian 2-mêtric sắp thứ tự. Xét ánh xạ $T:X\to X$ xác định bởi $T1=T2=T3=1$, $T4=3$. Chọn $x=1$, $y=4$, $a=4$, ta có $d(T1,T4,4)=d(1,3,4)=1$ và

$$\frac{1}{2}(d(1,T4,4)+d(4,T1,4))-\varphi(d(1,T4,4),d(4,T1,4))$$
$$=\frac{1}{2}-\varphi(1,0)<\frac{1}{2}.$$

Suy ra T không thỏa mãn điều kiện C-co yếu trong [4, Theorem 2.3]. Do đó, [4, Theorem 2.3] không áp dụng được cho ánh xạ T này. Bây giờ, xét hàm $\varphi(a,b)=\frac{1}{3}(a+b)$ với $a,b\ge 0$. Lấy $x_0=1$, ta có $O(x_0;T)=\{1\}$. Suy ra $\overline{O(x_0;T)}=\{1\}$. Do đó, với mọi $x,y\in\overline{O(x_0;T)}$ và với mọi $a\in X$, ta có $d(Tx,Ty,a)=0$ và

$$\frac{1}{2}(d(x,Ty,a)+d(y,Tx,a)-\varphi(d(x,Ty,a),d(y,Tx,a)))$$
$$=\frac{1}{3}(d(x,Ty,a)+d(y,Tx,a))\ge 0.$$

Suy ra T thỏa mãn điều kiện (1) của Hệ quả 2.4.

Hơn nữa, các giả thiết còn lại trong Hệ quả 2.4 đều thỏa mãn. Vì vậy, Hệ quả 2.4 áp dụng được cho ánh xạ T.

Ví dụ sau là một minh họa về sự tồn tại điểm bất động chung của hai ánh xạ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.7.

Ví dụ 2.11. Cho $X = \{1,2,3,4\}$ với quan hệ thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ và 2-mêtric d trên X được xác định bởi

$$d(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \text{ hoặc } y = z \text{ hoặc } z = x \text{ hoặc } \{x,y,z\} = \{1,2,3\} \text{ hoặc } \{1,2,4\} \\ 1 & \text{nếu } \{x,y,z\} = \{1,3,4\} \text{ hoặc } \{2,3,4\} \end{cases}.$$

Khi đó, (X,d) là không gian 2-mêtric sắp thứ tự. Xét cặp ánh xạ $T,S : X \to X$ xác định bởi $T1 = T2 = T3 = T4 = 3$ và $S1 = S2 = S3 = 3$, $S4 = 1$.

Xét hàm $\psi(t) = \dfrac{1}{4}t$ với mọi $t \geq 0$ và hàm $\varphi(a,b,c,d) = \dfrac{1}{3}(a+b+c+d)$ với $a,b,c,d \geq 0$.

Lấy $x_0 = 1$, ta có $O(x_0;S,T) = \{1,3\}$. Suy ra $\overline{O(x_0;S,T)} = \{1,3\}$. Do đó, với mọi $x,y \in \overline{O(x_0;S,T)}$ và với mọi $a \in X$, ta có $d(Tx,Sy,a) = 0$ và

$$\psi(d(x,Tx,a) + d(y,Sy,a) + d(x,Sy,a) + d(y,Tx,a)$$
$$-\varphi(d(x,Tx,a), d(y,Sy,a), d(x,Sy,a), d(y,Tx,a))) = 0$$

Vì vậy, T,S là cặp ánh xạ (ψ,S,C)-co yếu tổng quát. Hơn nữa, các giả thiết còn lại trong Định lí 2.7 đều thỏa mãn. Do đó, Định lí 2.7 áp dụng được cho cặp ánh xạ T,S.

Tài liệu tham khảo

[1]. S. Chandok (2013), "Some common fixed point results for generalized weak contractive mappings in partially ordered metric spaces", *J. Nonlinear Anal. Optim.*, 4 (1), p. 45-52.

[2]. S. K. Chatterjea (1972), "Fixed point theorems", *Rend. Acad. Bulgare. Sci.*(25), p. 727-730.

[3]. B. S. Choudhury (2009), "Unique fixed point theorem for weakly C-contractive mapping", *Kathmandu Univ. J. Sci. Engi. Tech.*, 5 (1), p. 6-13.

[4]. N. V. Dung and V. T. L. Hang (2013), "Fixed point theorems for weak C-contractions in partially ordered 2-metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2013:161), p. 1-12.

[5]. S. Gähler (1963), "2-metrische Räume und ihre topologische Struktur", *Math. Nachr.*, (26), p. 115-118.

[6]. J. Harjani, B. López, and K. Sadarangani (2011), "Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in ordered metric spaces", *Comput. Math. Appl.*, (61), p. 790-796.

[7]. H. K. Nashine (2014), "Common fixed point via weakly (ψ,S,C)-contraction mappings on ordered metric spaces and application to intergral equation", *Thai. J. Math.*, 12 (3), p. 729-747.

[8]. B. E. Rhoades (1977), "A comparison of various definitions of contractive mappings", *Trans. Amer. Math. Soc.*, (226), p. 257-290.

COMMON FIXED POINT THEOREMS FOR GENERALIZED WEAK (ψ,S,C)-CONTRACTION MAPPINGS IN PARTIALLY ORDERED 2-METRIC SPACES

Summary

In this paper, we introduce the notions of a weak (ψ,S,C)-contraction mapping, a generalized weak (ψ,S,C)-contraction mapping in partially ordered 2-metric spaces and establish some common fixed point theorems for these two classes of mappings. These results are the generalizations of the main results in [4] and [7]. We also provide some illustrated examples for the obtained results.

Keywords: common fixed point, T-weakly isotone increasing mappings, generalized weak (ψ,S,C)-contraction mappings, orbitally complete 2-metric spaces.

Ngày nhận bài: 16/3/2016; Ngày nhận lại: 13/6/2016; Ngày duyệt đăng: 27/9/2016.