DƯỚI VI PHÂN LỒI THEO HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

• Nguyễn Thị Thanh Thảo(*), Võ Đức Thịnh(*)

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số tính chất của hàm lồi theo hướng và dưới vi phân lồi theo hướng. Sau đó, chúng tôi áp dụng các kết quả về dưới vi phân lồi theo hướng để đặc trưng điều kiện cần và đủ cho nghiệm bài toán tối ưu.

Từ khóa: Hàm lồi theo hướng, dưới vi phân lồi theo hướng, bài toán tối ưu.

1. Giới thiệu

Trong Lí thuyết tối ưu, người ta quan tâm đến bài toán sau.

Tìm nghiệm tối ưu của bài toán

$$\min f(x),\ x \in \Omega. \quad (1)$$

trong đó f *là hàm lồi từ* $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *và* Ω *là một tập con khác rỗng của* $\mathbb{R}^n$.

Chúng ta nhận thấy rằng, nếu f là khả vi tại một điểm nào đó thì ta có thể xấp xỉ hàm f bởi một hàm bậc nhất tại điểm đó (được gọi là *tiếp tuyến* trong giải tích thực). Tuy nhiên, nếu f không khả vi thì chúng ta không thể làm được điều tương tự. Năm 1960, Rockafellar [8] đề xuất ý tưởng xấp xỉ hàm lồi, không khả vi f tại một điểm nào đó bởi một tập được gọi là *dưới vi phân (lồi)* thay vì là một hàm tuyến tính như trong trường hợp khả vi.

Định nghĩa 1.1 ([4]). Cho hàm $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó

(1) ϕ được gọi là *hàm lồi* nếu

$$\phi\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \le \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \left[0;1\right].$$

(2) $\xi \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *subgradient* của hàm ϕ tại $\overline{x}$ nếu $\phi(\overline{x})$ là hữu hạn và

$$\phi(x) - \phi(\overline{x}) \ge \left\langle \xi, x - \overline{x} \right\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(3) Tập tất cả các subgradient của hàm ϕ tại $\overline{x}$ được gọi là *dưới vi phân* của hàm ϕ tại $\overline{x}$ và được ký hiệu là $\partial\phi(\overline{x})$. Vậy

$$\partial\phi(\overline{x}) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}: \phi(x) - \phi(\overline{x}) \ge \left\langle \xi, x - \overline{x} \right\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Bằng Lí thuyết dưới vi phân, nhiều tác giả đã đặc trưng các điều kiện cần và đủ cho các bài toán tối ưu và tối ưu điều khiển liên quan đến các hàm lồi như [2], [3], cũng như đặc trưng tính chất tập nghiệm của bài toán tối ưu và bất đẳng thức biến phân như [5], [6]. Tuy nhiên, ngay cả trong $\mathbb{R}$ có nhiều lớp hàm không lồi trên toàn bộ $\mathbb{R}$ mà chỉ lồi theo một hướng nào đó. Đối với những hàm này, công cụ dưới vi phân trong giải tích lồi (theo định nghĩa của Rockafellar) không giúp chúng ta giải quyết được bài toán (1) mà chúng ta cần sử dụng một công cụ khác.

Năm 1976, T. Munakata và cộng sự đã giới thiệu khái niệm tập lồi theo hướng và xây dựng một số tính chất của tập này, sau đó áp dụng vào bài toán điều khiển. Năm 1987, A. Bressan trong bài báo [1] đã đưa ra khái niệm và một số tính chất của tập lồi theo hướng (khái niệm này khác với khái niệm mà T. Munakata và S. Kaneko đã đưa ra trước đó) và áp dụng vào việc giải quyết bài toán tối ưu điều khiển.

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm về tập lồi theo hướng, hàm lồi theo hướng và dưới vi phân lồi theo hướng. Qua đó, chúng tôi thiết lập một số qui tắc tính cho dưới vi phân theo hướng và áp dụng các kết quả này vào việc giải quyết một số bài toán tối ưu. Trước hết chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và kết quả của giải tích lồi như sau.

Định nghĩa 1.2 ([4]). Cho tập $F \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng. Khi đó F là *tập lồi* nếu

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in F, \forall x, y \in F, \lambda \in \left[0;1\right].$$

Định nghĩa 1.3 ([4]). Cho tập lồi $F \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng. Khi đó *phần trong tương đối* của tập F được xác định bởi

$$riF = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0, (x + \varepsilon B) \cap affF \subset F \right\},$$

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

trong đó $affF$ là bao affine của tập F; B là hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.4 ([4]). Cho hàm $\phi: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Khi đó *miền hữu dụng, phần trên đồ thị* của hàm ϕ lần lượt được xác định bởi

$$dom\phi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) < +\infty\right\},$$

$$epi\phi = \left\{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \phi(x) \le \alpha\right\}.$$

Định nghĩa 1.5 ([4]). Cho hàm $\phi: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Khi đó ϕ được gọi là *chính thường* nếu $dom\phi \ne \varnothing$ và $\phi(x) > -\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.6 ([4]). Cho tập lồi $F \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng. Khi đó

(1) Véctơ $x^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *pháp tuyến (ngoài)* của tập lồi F tại $\overline{x} \in F$, nếu

$$\left\langle x^*, x - \overline{x}\right\rangle \le 0,\ \forall x \in F.$$

(2) Tập tất cả các véctơ pháp tuyến ngoài của tập lồi F tại $\overline{x} \in F$ được gọi là *nón pháp tuyến ngoài* của F tại $\overline{x} \in F$, ký hiệu $N(\overline{x};F)$. Vậy

$$N(\overline{x};F) = \left\{x^* \in \mathbb{R}^n : \left\langle x^*, x - \overline{x}\right\rangle \le 0, \forall x \in F\right\}.$$

(3) Hàm $\delta_F : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *hàm chỉ* trên tập F với

$$\delta_F\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \in F, \\ +\infty & \text{khi } x \notin F. \end{cases}$$

Với $\overline{x} \in F$ thì

$$\begin{aligned} \partial\delta_F(\overline{x}) &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \delta_F(x) - \delta_F(\overline{x}) \ge \left\langle \xi, x - \overline{x}\right\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : 0 \ge \left\langle \xi, x - \overline{x}\right\rangle, \forall x \in F\right\} \\ &= N(\overline{x};F). \end{aligned}$$

Trong [4], các tác giả đã giới thiệu một số tính chất dưới vi phân của hàm lồi.

Định lí 1.7 ([4], Định lí 2.91). *Cho các hàm lồi chính thường* $\phi, \phi_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1,2$ *và* $ri(dom\phi_1) \cap ri(dom\phi_2) \ne \varnothing$. *Khi đó*

(1) $\partial\alpha\phi(x) = \alpha\partial\phi(x)$ *với mọi* $\alpha > 0$,

(2) $\partial(\phi_1 + \phi_2)(x) = \partial\phi_1(x) + \partial\phi_2(x)$.

Bổ đề 1.8 ([4], Mệnh đề 2.64). *Cho hàm lồi* $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *sao cho* $ri(dom\phi) \ne \varnothing$. *Khi đó* $ri(epi\phi) \ne \varnothing$ *và được xác định bởi*

$$ri(epi\phi) = \left\{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in ri(dom\phi), \phi(x) < \alpha\right\}.$$

Định lí 1.9 ([4], Định lí 2.26). *Cho tập lồi* $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, *khác rỗng sao cho* $riF_1 \cap F_2 = \varnothing$ *hoặc* $F_1 \cap riF_2 = \varnothing$. *Khi đó tồn tại* $a \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$\left\langle a, x_1\right\rangle \ge \left\langle a, x_2\right\rangle, \forall x_1 \in F_1,\ \forall x_2 \in F_2.$$

2. Dưới vi phân lồi theo hướng

Định nghĩa 2.1. (i) Cho tập $F \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng và $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó ϕ được gọi là *lồi tương ứng với* F tại $\overline{x} \in dom\phi$ nếu

$$\phi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda\phi(x_1) + (1-\lambda)\phi(x_2)$$
$$\forall x_i \in \overline{x} + C_F,\ \lambda \in \left[0;1\right],\ i = 1,2$$

trong đó $C_F := \left\{\lambda u \middle| \lambda \ge 0, u \in F\right\}$ là *nón sinh ra bởi tập* F.

(ii) Cho tập $\Omega, F \subset \mathbb{R}^n$, là các tập khác rỗng và $\overline{x} \in \Omega$. Ta nói Ω là tập lồi tương ứng với F tại $\overline{x}$ nếu với mọi $\lambda \in [0;1], x, y \in \overline{x} + C_F$ ta có $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$, trong đó C_F được xác định như trên.

Nhận xét 2.2. Cho tập $F \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng và $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Nếu ϕ là hàm lồi thì ϕ là hàm lồi tương ứng với mọi tập F tại mọi x thuộc vào $dom\phi$.

Thật vậy, cho tập $F \subset \mathbb{R}^n$ và $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, lấy $\overline{x} \in dom\phi$. Khi đó với mỗi $x, y \in \overline{x} + C_F \subset \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \left[0,1\right]$ ta có

$$\phi\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \le \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

Do đó ϕ lồi tương ứng với F. □

Chú ý rằng tồn tại ϕ là hàm lồi tương ứng với F_1, F_2 tại x và $C_{F_1} \cup C_{F_2} = \mathbb{R}^n$ nhưng ϕ không lồi. Cụ thể ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2.3. Cho $\phi(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x > 0, \\ 1 - x & \text{khi } x \le 0, \end{cases}$

và $F_1 = (0;1) \subset \mathbb{R},\ F_2 = (-1;0) \subset \mathbb{R}$. Khi đó ϕ không là hàm lồi nhưng ϕ lồi tương ứng với tập F_1 và F_2 tại 0. Thật vậy, ϕ lồi tương ứng với F_1 tại 0 vì

$C_{F_1} = \{\lambda u, \lambda \geq 0, u \in F_1\} = \{\lambda \geq 0\} = [0, +\infty)$.

Với $\lambda \in [0,1]$ ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x = y = 0$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 &= \lambda + 1 - \lambda \\ &= \lambda\phi(0) + (1-\lambda)\phi(0) \\ &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $x = 0, \ y > 0$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda x + (1-\lambda)y \\ &\leq \lambda - \lambda x + (1-\lambda)y \\ &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).\end{aligned}$$

Trường hợp 3. $x > 0, \ y > 0$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda x + (1-\lambda)y \\ &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).\end{aligned}$$

Suy ra ϕ lồi tương ứng với F_1. Tương tự ta kiểm tra ϕ lồi tương ứng với F_2 tại 0. Ta có $C_{F_2} = \{\lambda u \mid \lambda \geq 0, u \in F_2\} = (-\infty, 0]$. Với $x, y \in (-\infty, 0]$, $\lambda \in [0,1]$ ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x = y = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= 1 \\ &= \lambda + 1 - \lambda \\ &= \lambda\phi(0) + (1-\lambda)\phi(0) \\ &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $x = 0, \ y < 0$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= 1 - \lambda x - (1-\lambda)y \\ &= 1 - (1-\lambda)y \\ &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).\end{aligned}$$

Trường hợp 3. $x < 0, \ y < 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= 1 - \lambda x - (1-\lambda)y \\ &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).\end{aligned}$$

Suy ra ϕ lồi tương ứng với F_2.

Sau đây, chúng tôi giới thiệu định nghĩa dưới vi phân lồi tương ứng với một tập và nón pháp tuyến tương ứng với một tập như sau.

Định nghĩa 2.4. (i) Cho tập $F \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng và hàm chính thường $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lồi tương ứng với F tại $\overline{x} \in dom\phi$. Khi đó, $\xi \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *subgradient tương ứng với* F *tại* $\overline{x}$ của hàm ϕ nếu

$$\phi(x) - \phi(\overline{x}) \geq \langle \xi, x - \overline{x} \rangle, \text{ với mọi } x \in \overline{x} + C_F.$$

Tập tất cả subgradient tương ứng với F tại $\overline{x}$ được gọi là *dưới vi phân tương ứng với tập* F *tại* $\overline{x}$ của ϕ và được kí hiệu $\partial_F\phi(\overline{x})$. Vậy

$$\partial_F\phi(\overline{x}) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(x) - \phi(\overline{x}) \geq \langle \xi, x - \overline{x} \rangle, \forall x \in \overline{x} + C_F\}.$$

Khi $F = \{u\}$ ta gọi dưới vi phân tương ứng với tập F tại $\overline{x}$ của ϕ là dưới vi phân theo hướng u tại $\overline{x}$ của ϕ. Ta gọi chung dưới vi phân tương ứng với tập F tại $\overline{x}$ của ϕ và dưới vi phân theo hướng u tại $\overline{x}$ của ϕ là *dưới vi phân theo hướng* tại $\overline{x}$ của ϕ.

(ii) Cho Ω là một tập lồi tương ứng với tập F tại $\overline{x} \in \Omega$. *Nón pháp tuyến tương ứng với* F của Ω tại $\overline{x}$ được kí hiệu là $N_F(\overline{x}; \Omega)$, được xác định như sau.

$$N_F(\overline{x}, \Omega) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x - \overline{x} \rangle \leq 0, \forall x \in \Omega \cap (\overline{x} + C_F)\}.$$

Định lí sau đây là mở rộng của Định lí 1.7 cho trường hợp dưới vi phân lồi theo hướng.

Định lí 2.5. *Cho tập* $F \subset \mathbb{R}^n$, *khác rỗng và các hàm chính thường* $\phi, \phi_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$. *Giả sử* ϕ, ϕ_1, ϕ_2 *là các hàm lồi tương ứng* F *tại* $\overline{x}$ *và* $ri(dom\phi_1) \cap ri(dom\phi_2) \cap ri(\overline{x} + C_F) \neq \varnothing$. *Khi đó ta có các khẳng định sau.*

(1) $\partial_F \alpha\phi(\overline{x}) = \alpha\partial_F\phi(\overline{x})$ *với mọi* $\alpha > 0$,

(2) $\partial_F(\phi_1 + \phi_2)(\overline{x}) = \partial_F\phi_1(\overline{x}) + \partial_F\phi_2(\overline{x})$.

Chứng minh. (1). Với mỗi $\xi \in \partial_F\alpha\phi(\overline{x})$ và $x \in \overline{x} + C_F$ ta có

$$\begin{aligned}&\langle \xi, x - \overline{x} \rangle - (\alpha\phi(x) - \alpha\phi(\overline{x})) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha\left[\left\langle \frac{\xi}{\alpha}, x - \overline{x} \right\rangle - (\phi(x) - \phi(\overline{x}))\right] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \frac{\xi}{\alpha}, x - \overline{x} \right\rangle - (\phi(x) - \phi(\overline{x})) \leq 0.\end{aligned}$$

Điều này tương đương $\dfrac{\xi}{\alpha} \in \partial_F\phi(\overline{x})$ hay $\xi \in \alpha\partial_F\phi(\overline{x})$.

(2). Với $x \in \overline{x} + C_F$, $\xi_i \in \partial_F \phi_i(\overline{x})$ $(i=1,2)$, ta có

$$\phi_1(x) - \phi_1(\overline{x}) \geq \left\langle \xi_1, x - \overline{x} \right\rangle,$$
$$\phi_2(x) - \phi_2(\overline{x}) \geq \left\langle \xi_2, x - \overline{x} \right\rangle.$$

Do đó

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) - (\phi_1(\overline{x}) + \phi_2(\overline{x})) \geq \left\langle \xi_1, x - \overline{x} \right\rangle + \left\langle \xi_2, x - \overline{x} \right\rangle.$$

Suy ra

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) - (\phi_1 + \phi_2)(\overline{x}) \geq \left\langle \xi_1 + \xi_2, x - \overline{x} \right\rangle.$$

Do đó ta có $(\xi_1 + \xi_2) \in \partial_F(\phi_1 + \phi_2)(\overline{x})$. Vì vậy

$$\partial_F(\phi_1 + \phi_2)(\overline{x}) \supset \partial_F \phi_1(\overline{x}) + \partial_F \phi_2(\overline{x}).$$

Ta chứng minh bao hàm ngược lại, với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, ta đặt

$$\psi_1(x) = \phi_1(x + \overline{x}) - \phi_1(\overline{x}) - \left\langle \xi, x \right\rangle,$$
$$\psi_2(x) = \phi_2(x + \overline{x}) - \phi_2(\overline{x}).$$

Ta thấy $\psi_1(0) = 0$, $\psi_2(0) = 0$. Với mỗi $\xi \in \partial_F(\phi_1 + \phi_2)(x)$, ta có

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) - (\phi_1 + \phi_2)(\overline{x}) \geq \left\langle \xi, x - \overline{x} \right\rangle, \forall x \in \overline{x} + C_F.$$

Với $x \in C_F$, thay x bởi $x + \overline{x}$ ta có

$$(\phi_1 + \phi_2)(x + \overline{x}) - (\phi_1 + \phi_2)(\overline{x}) \geq \left\langle \xi, x \right\rangle.$$
$$\Leftrightarrow (\phi_1 + \phi_2)(x + \overline{x}) - (\phi_1 + \phi_2)(\overline{x}) - \left\langle \xi, x \right\rangle \geq \left\langle 0, x - 0 \right\rangle.$$
$$\Leftrightarrow (\psi_1 + \psi_2)(x) - (\psi_1 + \psi_2)(0) \geq \left\langle 0, x - 0 \right\rangle.$$

Điều này tương đương với $0 \in \partial_F(\psi_1 + \psi_2)(0)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\overline{x} = 0$, $\xi = 0$, $\phi_1(0) = 0$ và $\phi_2(0) = 0$. Khi đó $0 \in \partial_F(\phi_1 + \phi_2)(0)$. Do đó, $\forall x \in C_F$ ta có $(\phi_1 + \phi_2)(x) \geq (\phi_1 + \phi_2)(0) = 0$, hay $\phi_1(x) \geq -\phi_2(x)$. Đặt $\varphi_i = \phi_i + \delta_{C_F}$ $(i=1,2)$. Khi đó φ_i $(i=1,2)$ là hàm lồi. Thật vậy, với $x, y \in C_F$ thì $\varphi_1(x) = \phi_1(x)$. Với $x \in C_F, y \notin C_F$ ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\lambda = 0$, ta có $\varphi_1(y) \leq \varphi_1(y)$.

Trường hợp 2. $\lambda = 1$, ta có $\varphi_1(x) \leq \varphi_1(x)$.

Trường hợp 3. $\lambda \in (0,1)$, ta có

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_1(y) &= (1-\lambda)\varphi_1(y) \\ &= +\infty \\ &\geq \varphi_1(\lambda x + (1-\lambda)y). \end{aligned}$$

Với $x, y \notin C_F$ ta có

$$\lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_1(y) = +\infty \geq \varphi_1(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Vì $ri(dom\phi_1) \cap ri(dom\phi_2) \cap ri(\overline{x} + C_F) \neq \varnothing$ nên $ri(dom\varphi_1) \cap ri(dom\varphi_2) \neq \varnothing$. Đặt

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in \overline{x} + C_F, \phi_1(x) \leq \alpha \right\} \\ &= \left\{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \varphi_1(x) \leq \alpha \right\} \\ &= epi\varphi_1. \end{aligned}$$

Do đó, $riF_1 = ri(epi\varphi_1)$. Áp dụng Bổ đề 1.8 ta có

$$\begin{aligned} riF_1 &= ri(epi\varphi_1) \\ &= \left\{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in ri(dom\varphi_1) : \varphi_1(x) < \alpha \right\} \\ &= \left\{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in ri(\overline{x} + C_F) : \varphi_1(x) < \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Đặt $F_2 = \left\{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in dom\varphi_2 : -\varphi_2(x) < \alpha \right\}$. Khi đó, $riF_1 \cap F_2 = \varnothing$. Mặt khác, ta có $(0;0) \in F_1 \cap F_2$. Áp dụng ([4], Định lí 2.26 (ii)) tồn tại $(x^*, \alpha^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ với $(x^*, \alpha^*) \neq (0;0)$ sao cho

$$\left\langle x^*, x \right\rangle + \alpha^* \alpha \geq 0, \ \forall (x, \alpha) \in F_1,$$
$$\left\langle x^*, x \right\rangle + \alpha^* \alpha \leq 0, \ \forall (x, \alpha) \in F_2.$$

Vì $\phi_1(0) = 0$ nên $(0;\alpha) \in F_1$ với $\alpha \geq 0$. Suy ra $\alpha^* \geq 0$. Giả sử $\alpha^* = 0$, suy ra $\left\langle x^*, x_1 \right\rangle \geq 0 \geq \left\langle x^*, x_2 \right\rangle, \forall x_i \in dom\varphi_i, i = 1,2$. Do đó $dom\varphi_1$ và $dom\varphi_2$ có thể tách được, nên mâu thuẫn với $ri(dom\varphi_1) \cap ri(dom\varphi_2) \neq \varnothing$. Do đó $\alpha^* > 0$. Vì vậy ta có

$$\left\langle x^*, x_1 \right\rangle + \alpha^* \alpha_1 \geq 0, \forall (x_1, \alpha_1) \in F_1, \ \left\langle x^*, x_2 \right\rangle + \alpha^* \alpha_2 \leq 0, \forall (x_2, \alpha_2) \in F_2$$

hay

$$\left\langle \frac{x^*}{\alpha^*}, x \right\rangle + \alpha \geq 0, \forall (x, \alpha) \in F_1, \ \left\langle \frac{x^*}{\alpha^*}, x \right\rangle + \alpha \leq 0, \forall (x, \alpha) \in F_2.$$

Vì $(x, \phi_1(x)) \in F_1$ và $(x, -\phi_2(x)) \in F_2$ nên

$$\left\langle \frac{x^*}{\alpha^*}, x \right\rangle + \phi_1(x) - \phi_1(0) \ge 0, \ \left\langle \frac{x^*}{\alpha^*}, x \right\rangle - (\phi_2(x) - \phi_2(0)) \le 0, \forall x \in C_F.$$

Do đó $\frac{-x^*}{\alpha^*} \in \partial_F \phi_1(0)$ và $\frac{x^*}{\alpha^*} \in \partial_F \phi_2(0)$. Vậy $0 \in \partial_F \phi_1(0) + \partial_F \phi_2(0)$. □

3. Một số ứng dụng

Trong mục này, chúng tôi sẽ đặc trưng điều kiện cần cho nghiệm của bài toán sau.

$$Q\text{ - } \min f(x), \ x \in \Omega \qquad \text{(P)}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lồi tương ứng với tập lồi $Q \subset \mathbb{R}^n$, Ω là tập lồi.

Định nghĩa 3.1. Điểm $\overline{x} \in \Omega \cap domf$ được gọi là *nghiệm tối ưu tương ứng với* Q của (P) nếu $f(x) \ge f(\overline{x})$, với mọi $x \in (\overline{x} + C_Q) \cap \Omega$.

Trước tiên, chúng ta xét bài toán đơn giản như sau.

$$Q\text{ - } \min f(x), \ x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(P1)}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lồi theo tương ứng với $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 3.2. Điểm $\overline{x} \in domf$ được gọi là *nghiệm tối ưu tương ứng với* Q của (P1) nếu

$$f(x) \ge f(\overline{x}), \text{ với mọi } x \in \overline{x} + C_Q.$$

Định lí 3.3. *Xét bài toán (P1). Khi đó* $\overline{x} \in domf$ *là nghiệm tối ưu theo hướng* Q *của (P1) nếu và chỉ nếu* $0 \in \partial_Q f(\overline{x})$.

Chứng minh. Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu theo hướng Q của (P1). Khi đó với mọi $x \in \overline{x} + C_Q$ ta có

$$f(x) \ge f(\overline{x}) \Leftrightarrow f(x) - f(\overline{x}) \ge \left\langle 0, x - \overline{x} \right\rangle.$$

Điều này tương đương với $0 \in \partial_Q f(\overline{x})$. □

Áp dụng Định lí 2.5 chúng tôi đặc trưng điều kiện cần cho nghiệm của bài toán (P) như sau.

Định lí 3.4. *Xét bài toán (P). Giả sử rằng* $ri(domf) \cap ri\Omega \cap ri(\overline{x} + C_Q) \ne \varnothing$. *Khi đó* $\overline{x} \in domf \cap \Omega$ *là nghiệm tối ưu theo hướng* Q *của (P) nếu và chỉ nếu*

$$0 \in \partial_Q f(\overline{x}) + \mathrm{N}_Q(\overline{x}, \Omega).$$

Chứng minh. Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu theo hướng Q của (P). Từ Định lí 3.3 với f được thay bởi $f + \delta_\Omega$, điều này tương đương với $0 \in \partial_Q (f + \delta_\Omega)(\overline{x})$.

Vì $ri(domf) \cap ri(dom\delta_\Omega) \cap ri(\overline{x} + C_Q) \ne \varnothing$. Theo Định lí 2.5 ta có $0 \in \partial_Q f(\overline{x}) + \partial_Q \delta_\Omega(\overline{x})$. Ta thấy $\partial_Q \delta_\Omega(\overline{x}) = \mathrm{N}_Q(\overline{x}, \Omega)$. Vì vậy ta có $0 \in \partial_Q f(\overline{x}) + \mathrm{N}_Q(\overline{x}, \Omega)$. □

Sau đây, chúng tôi trình bày ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Ví dụ 3.5. Xét hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ với $f(x, y) = x^2 + y$

$\Omega = \left[-1,1\right] \times \left[-1,1\right]$, $Q = \mathbb{R} \times \left\{1\right\}$ khi đó $C_Q = \mathbb{R} \times \left[0, +\infty\right)$.

$$\partial_Q f(0,0) = \left\{ \begin{array}{r} (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 : \left\langle (x^*, y^*), \left(x, y\right) - (0,0) \right\rangle \\ \le f(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R} \times \left[0, +\infty\right) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 : x^* x + y^* y \le x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \times \left[0, +\infty\right) \right\}$$

$$= \left\{0\right\} \times \left(-\infty, 1\right].$$

Do đó $(0,0)$ là nghiệm tối ưu tương ứng với Q nhưng không là nghiệm tối ưu trên Ω của bài toán (1).

Bài báo này được tài trợ bởi đề tài cấp cơ sở mã số CS.2015.02.25 tại Trường Đại học Đồng Tháp.

Tài liệu tham khảo

[1]. A. Bressan (1987), "Directional convexity and finite optimality conditions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (125), p. 234-246.

[2]. J. V. Burke and R. A. Poliquin (1992), "Optimality conditions for non-finite valued convex composite functions", *Mathematical Programming*, (57), p. 103-120.

[3]. E. Casas and F. Troltzsch (1999), "Second order necessary optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations", *Journal of Applied Mathematics & Optimization*, (39), p. 211-227.

[4]. A. Dhara and J. Dutta (2012), *Optimality conditions in convex optimization*, CRC Press.

[5]. A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar (1996), "Characterization of strong regularity for variational inequalities over polyhedral convex sets", *SIAM Journal on Control and Optimization*, (6), p. 1087-1105.

[6]. R. Janin and J. Gauvin (1999), "Lipschitz-type stability in nonsmooth convex programs", *SIAM Journal on Control and Optimization*, (38), p. 124-137.

[7]. T. Munakata and S. Kaneko (1976), "Directional convexity and the directional discrete maximum principle sfor quantized control system", *Keio Engineering Reports*, 29 (2), p. 7-12.

[8]. R. T. Rockafellar (1960), *Convex analysis*, Princeton University Press.

DIRECTIONAL (CONVEX) SUBDIFFERENTIAL AND APPLICATIONS

Summary

In this paper, we introduce some properties of directionally convex functions and the directionally (convex) subdifferentials. Then, we apply results of the directionally subdifferentials to characterize necessary and sufficient conditions for solutions of optimization problems.

Keywords: directionally convex function, directional (convex) subdifferential, optimization problem.

Ngày nhận bài: 26/01/2016; Ngày nhận lại: 13/4/2016; Ngày duyệt đăng: 22/4/2016.