BCQ VÀ BCQ MẠNH THEO HƯỚNG CHO TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH LỒI VÀ ÁP DỤNG

• Huỳnh Ngọc Cảm(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm các điều kiện chính quy mới gồm BCQ theo hướng, BCQ mạnh theo hướng và BCQ mở rộng theo hướng. Đồng thời, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ của những điều kiện chính quy này và áp dụng vào lớp bài toán tối ưu ràng buộc bất phương trình lồi theo hướng.

Từ khóa: Hàm lồi theo hướng, BCQ theo hướng, BCQ mạnh theo hướng, BCQ mở rộng theo hướng.

1. Giới thiệu

Trong lí thuyết tối ưu, điều kiện tối ưu KKT (Karush-Kuhn-Tucker) được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Để đảm bảo cho KKT là điều kiện cần của bài toán tối ưu ràng buộc, bài toán cần thỏa một số giả thiết trên các hàm ràng buộc, các giả thiết đó gọi là *điều kiện chính quy* (constraint qualification). Các điều kiện chính quy được dùng nhiều có thể kể đến SCQ, LICQ, MFCQ, ACQ, BCQ [9], trong đó BCQ là điều kiện chính quy tổng quát nhất.

BCQ (basic constraint qualification) là khái niệm quan trọng, quan hệ chặt chẽ với các khái niệm quan trọng khác trong giải tích lồi và lí thuyết tối ưu như chính quy metric (metric regularity), điều kiện tối ưu KKT, biên sai (Error bound), CHIP mạnh (strong conical hull intersection property), chính quy tuyến tính (linear regularity) và xấp xỉ tốt nhất (best approximation). Năm 1993, khái niệm BCQ được giới thiệu bởi Hiriart-Urrutty và Lemarechal [3]. Sau đó, khái niệm này đã được mở rộng bởi các tác giả [1], [5], [6]. Năm 2004, Zheng và Ng [10] dùng dưới vi phân suy biến (singular subdifferential) để giới thiệu khái niệm BCQ mạnh (strong BCQ) trên lớp hàm lồi nửa liên tục dưới và chứng tỏ BCQ mạnh thực sự mạnh hơn BCQ. Tác giả sử dụng điều kiện chính quy này để đặc trưng tính chất chính quy metric cho bất phương trình lồi. Sau đó, Hu [4] đã nghiên cứu sâu hơn về tính chất BCQ mạnh bằng việc giới thiệu độ đo của *tập đích* (end set) và đưa ra các điều kiện tương đương cho BCQ mạnh. Năm 2008, Li và các cộng sự [7] đã xây dựng điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu ràng buộc bất phương trình với hệ ràng buộc là các hàm lồi không cần nửa liên tục dưới.

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu các khái niệm BCQ theo hướng, BCQ mạnh theo hướng và BCQ mở rộng theo hướng. Đồng thời, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất và mối quan hệ giữa các công cụ này. Áp dụng các kết quả thu được, chúng tôi xây dựng điều kiện tối ưu cho một số bài toán tối ưu ràng buộc.

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và tính chất quan trọng trong tối ưu lồi được giới thiệu trong [2] mà chúng tôi sử dụng trong bài báo này.

Định nghĩa 1.1 [2]. (1) Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* nếu

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in C,\ \forall x, y \in C,\ \forall \alpha \in [0,1].$$

(2) Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập aphin* nếu

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in M,\ \forall x, y \in M,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(3) *Bao aphin* của tập $F \subset \mathbb{R}^n$ là tập aphin nhỏ nhất chứa F, kí hiệu $aff\ F$. Bao aphin của tập F chứa tất cả các tổ hợp tuyến tính của các phần tử của F.

(4) *Phần trong tương đối* của tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$, kí hiệu $ri\ C$, được định nghĩa như sau

$$ri\ C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap aff\ C \subset C\},$$

trong đó $B_\epsilon(x)$ là hình cầu tâm x bán kính ϵ.

(5) *Hàm chỉ* của tập C kí hiệu δ_C, được định nghĩa như sau

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

(*) Trường Đại học Đồng Tháp.

Kí hiệu $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, các phép toán trên $\overline{\mathbb{R}}$

$a+\infty=+\infty+a=+\infty,\ a\neq-\infty;$

$a-\infty=-\infty+a=-\infty,\ a\neq+\infty;$

$a.(\pm\infty)=\pm\infty.a=\pm\infty,\ a\in(0,+\infty];$

$a.(\pm\infty)=\pm\infty.a=\mp\infty,\ a\in[-\infty,0);$

$\dfrac{a}{\pm\infty}=0,\ \ a\in\mathbb{R};$

$\dfrac{\pm\infty}{a}=\pm\infty,\ \ a\in(0,+\infty);$

$\dfrac{\pm\infty}{a}=\mp\infty,\ \ a\in(-\infty,0).$

Định nghĩa 1.2 [2]. Cho hàm $\phi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}.$ Khi đó

(1) *Miền hữu hiệu* của hàm $\phi,$ kí hiệu *dom* $\phi,$ được định nghĩa như sau

$$dom\ \phi=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\phi(x)<+\infty\}.$$

(2) Hàm ϕ được gọi là *lồi* nếu với mọi $x,y\in\mathbb{R}^n$ và $\lambda\in[0,1]$, ta có

$$\phi((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)\phi(x)+\lambda\phi(y).$$

(3) Hàm ϕ được gọi là *chính thường* nếu $dom\ \phi\neq\varnothing$ và $-\infty<\phi(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$

(4) Tập hợp *đồ thị trên* của $\phi,$ kí hiệu *epi* $\phi,$ được định nghĩa như sau

$$epi\ \phi=\{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid x\in dom\ \phi,\ \phi(x)\le\alpha\}.$$

Định nghĩa 1.3 [2]. Cho tập con K đóng, lồi của $\mathbb{R}^n$ và $\bar{x}\in K.$ Khi đó *nón pháp tuyến* của tập K tại $\bar{x},$ kí hiệu $N(K,\bar{x}),$ được định nghĩa như sau

$$N(K,\bar{x})=\{x^*\in\mathbb{R}^n\mid\langle x^*,x-\bar{x}\rangle\le0\ \forall x\in K\}.\quad(1.1)$$

Định nghĩa 1.4 [2]. Cho hàm $\phi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, lồi, nửa liên tục dưới và $\bar{x}\in dom\ \phi.$ Khi đó, ta có các định nghĩa sau

(1) *Dưới vi phân* của ϕ tại $\bar{x},$ kí hiệu $\partial\phi(\bar{x}),$ được xác định bởi

$$\partial\phi(\bar{x})=\{x^*\in\mathbb{R}^n\mid(x^*,-1)\in N(epi\ \phi,(\bar{x},\phi(\bar{x})))\}.\quad(1.2)$$

(2) *Dưới vi phân suy biến* của ϕ tại $\bar{x},$ kí hiệu $\partial^\infty\phi(\bar{x}),$ được xác định bởi

$$\partial^\infty\phi(\bar{x})=\{x^*\in\mathbb{R}^n\mid(x^*,0)\in N(epi\ \phi,(\bar{x},\phi(\bar{x})))\}.\ (1.3)$$

Nhận xét 1.5 [2]. Với hàm ϕ như trong Định nghĩa 1.4 và $\bar{x}\in dom\ \phi,$ ta có

(1) $\partial\phi(\bar{x})=\{x^*\in\mathbb{R}^n\mid\langle x^*,x-\bar{x}\rangle\le\phi(x)-\phi(\bar{x}),\forall x\in\mathbb{R}^n\}.$

(2) $\partial^\infty\phi(\bar{x})=N(dom\ \phi,\bar{x}).$

(3) $\partial\phi(\bar{x})=\partial^\infty\phi(\bar{x})+\partial\phi(\bar{x}).$

Cho hàm $\phi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, lồi, nửa liên tục dưới. Ta xét bất phương trình lồi sau

$$\phi(x)\le0.\quad(1.4)$$

Gọi S là *tập nghiệm* của (1.4), nghĩa là $S=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\phi(x)\le0\}.$

Giả sử $A\subset\mathbb{R}^n,$ tích của tập $\mathbb{R}^+$ và tập A được xác định bởi

$$\mathbb{R}^+A=\{ta^*:t\in\mathbb{R}^+,\ a^*\in A\}.$$

Qui ước $\mathbb{R}^+A=\{0\}$ nếu $A=\varnothing.$

Giả sử $S\neq\varnothing,$ trong [10], Zheng và Ng đã giới thiệu khái niệm BCQ mở rộng, BCQ mạnh, BCQ như sau.

Định nghĩa 1.6 [10]. (1) Bất phương trình (1.4) được gọi là thỏa mãn *BCQ mở rộng* tại $\bar{x}\in\partial S$ nếu

$$N(S,\bar{x})=\partial^\infty\phi(\bar{x})+\mathbb{R}^+\partial\phi(\bar{x}).\quad(1.5)$$

(2) Bất phương trình (1.4) được gọi là thỏa mãn *BCQ mạnh* tại $\bar{x}\in\partial S$ nếu tồn tại $\tau\in(0,+\infty)$ sao cho

$$N(S,\bar{x})\cap\mathbb{B}\subset\partial^\infty\phi(\bar{x})+[0,\tau]\partial\phi(\bar{x})\quad(1.6)$$

trong đó $\mathbb{B}$ là hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n.$

(3) Khi ϕ là hàm liên tục, bất phương trình (1.4) được gọi là thỏa mãn *BCQ* tại $\bar{x}\in\partial S$ nếu

$$N(S,\bar{x})=\mathbb{R}^+\partial\phi(\bar{x}).\quad(1.7)$$

Cho $f,\ \phi:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n,$ xét bài toán tối ưu sau

$$\min f(x)\quad\text{với } \phi(x)\le0.\quad\text{(CP)}$$

Gọi $S=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\phi(x)\le0\}$ là *tập chấp nhận được* của bài toán (CP), $\bar{x}\in S$ là *điểm chấp nhận được* của bài toán (CP).

Trong [7, Định lí 5.1], thay họ $\{g_i:i\in I\}$ bởi hàm $\phi,$ ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.7. *Cho $\bar{x}$ là điểm chấp nhận được của bài toán (CP) và bất phương trình $\phi(x)\le0$ thỏa mãn BCQ tại $\bar{x}$. Khi đó $\bar{x}$ là* *nghiệm tối ưu của bài toán (CP) khi và chỉ khi tồn tại* $\lambda \geq 0$ *sao cho* $0 \in \partial f(\overline{x}) + \lambda \partial \phi(\overline{x})$.

2. Điều kiện chính quy theo hướng

Tiếp theo, bằng cách thay $x \in \mathbb{R}^n$ bởi $x \in \overline{x} + C_F$, tác giả trong [8] đã giới thiệu định nghĩa hàm lồi theo hướng, nón pháp tuyến lồi theo hướng, dưới vi phân lồi theo hướng và một số khái niệm quan trọng khác.

Giả sử F là tập con của $\mathbb{R}^n$, *nón sinh bởi tập* F, kí hiệu C_F, được định nghĩa như sau

$$C_F = \{\lambda u \mid \lambda \geq 0,\ u \in F\}.$$

Định nghĩa 2.1 [8]. Cho hàm $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó

(1) Hàm ϕ được gọi là *lồi theo hướng* F tại $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ nếu với mọi $x, y \in \overline{x} + C_F$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y).$$

(2) Hàm ϕ được gọi là *lồi theo hướng* F nếu ϕ lồi theo hướng F tại mọi điểm $x \in dom\ \phi$.

Định nghĩa 2.2 [8]. Cho tập con K đóng, lồi của $\mathbb{R}^n$ và $\overline{x} \in K$. Khi đó *nón pháp tuyến của tập* K *tại* $\overline{x}$ *theo hướng* F, kí hiệu $N_F(K, \overline{x})$, được xác định bởi

$$N_F(K,\overline{x}) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq 0,\ \forall x \in K \cap (\overline{x} + C_F)\}. \quad (2.1)$$

Định nghĩa 2.3 [8]. Cho hàm $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, lồi theo hướng F, nửa liên tục dưới và $\overline{x} \in dom\ \phi$. Khi đó

(1) *Dưới vi phân của* ϕ *theo hướng* F tại $\overline{x}$, kí hiệu $\partial_F \phi(\overline{x})$, được xác định bởi

$$\partial_F \phi(\overline{x}) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid (x^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\overline{x}, \phi(\overline{x})))\}. \quad (2.2)$$

(2) *Dưới vi phân suy biến của* ϕ *theo hướng* F tại $\overline{x}$, kí hiệu $\partial_F^\infty \phi(\overline{x})$, được xác định bởi

$$\partial_F^\infty \phi(\overline{x}) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid (x^*, 0) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\overline{x}, \phi(\overline{x})))\}. \quad (2.3)$$

Nhận xét 2.4. Trường hợp $\{0\} \subset \operatorname{int} F$. Khi đó

(1) Hàm ϕ lồi theo hướng F trở thành hàm lồi và điểm $\overline{x}$ là cực tiểu theo hướng F trở thành điểm cực tiểu.

(2) (2.1), (2.2) và (2.3) lần lượt trở thành (1.1), (1.2) và (1.3).

Kết quả sau đây của chúng tôi là sự mở rộng kết quả trong [2] và [10] cho trường hợp có hướng.

Mệnh đề 2.5. *Cho hàm* ϕ *như trong Định nghĩa 2.3 và* $\overline{x} \in dom\ \phi$*. Khi đó*

(1) $\partial_F \phi(\overline{x}) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq \phi(x) - \phi(\overline{x}),\ x \in \overline{x} + C_F\}$.

(2) $\partial_F^\infty \phi(\overline{x}) = N_F(dom\ \phi, \overline{x})$.

(3) $\partial_F \phi(\overline{x}) = \partial_F^\infty \phi(\overline{x}) + \partial_F \phi(\overline{x})$.

Chứng minh. (1) Đặt

$$A = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid (x^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\overline{x}, \phi(\overline{x})))\},$$

$B = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq \phi(x) - \phi(\overline{x}),\ \forall x \in \overline{x} + C_F\}$. Ta chứng minh $A = B$. Giả sử $x^* \in A$, theo Định nghĩa 2.3 (1), ta có

$$(x^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\overline{x}, \phi(\overline{x})))$$
$$\Rightarrow \langle (x^*, -1), ((x, \phi(x)) - (\overline{x}, \phi(\overline{x})))\rangle \leq 0,\ \forall x \in \overline{x} + C_F$$
$$\Rightarrow \langle (x^*, -1), (x-\overline{x}, \phi(x) - \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0,\ \forall x \in \overline{x} + C_F$$
$$\Rightarrow \langle x^*, x-\overline{x}\rangle - \phi(x) + \phi(\overline{x}) \leq 0,\ \forall x \in \overline{x} + C_F$$
$$\Rightarrow \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq \phi(x) - \phi(\overline{x}),\ \forall x \in \overline{x} + C_F$$
$$\Rightarrow x^* \in B.$$

Giả sử $x^* \in B$, ta có

$$\langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq \phi(x) - \phi(\overline{x}),\ \forall x \in \overline{x} + C_F$$
$$\Rightarrow \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq r - \phi(\overline{x}),\ \forall x \in \overline{x} + C_F,\ \phi(x) \leq r$$
$$\Rightarrow \langle x^*, x-\overline{x}\rangle - r + \phi(\overline{x}) \leq 0,\ \forall x \in \overline{x} + C_F,\ \phi(x) \leq r$$
$$\Rightarrow \langle (x^*, -1), (x-\overline{x}, r - \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0,\ (x, r) \in (\overline{x}, \phi(\overline{x})) + C_{F\times\mathbb{R}},\ \phi(x) \leq r$$
$$\Rightarrow \langle (x^*, -1), ((x, r) - (\overline{x}, \phi(\overline{x})))\rangle \leq 0,\ (x, r) \in \left((\overline{x}, \phi(\overline{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\right) \cap epi\ \phi$$
$$\Rightarrow (x^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\overline{x}, \phi(\overline{x})))$$
$$\Rightarrow x^* \in A.$$

(2) Giả sử $x^* \in \partial_F^\infty \phi(\overline{x})$. Khi đó ta có

$$(x^*, 0) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\overline{x}, \phi(\overline{x})))$$
$$\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (x, y) - (\overline{x}, \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0, \forall (x, y) \in epi\ \phi \cap \left((\overline{x}, \phi(\overline{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (x-\overline{x}, y - \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0, \forall (x, y) \in epi\ \phi \cap \left((\overline{x}, \phi(\overline{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (x-\overline{x}, y - \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0, \forall (x, y) \in epi\ \phi \cap \left((\overline{x}, \phi(\overline{x})) + C_F \times \mathbb{R}\right)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (x-\overline{x}, y - \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0, \forall (x, y) \in epi\ \phi \cap \left((\overline{x} + C_F, \phi(\overline{x}) + \mathbb{R}\right)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x^*, 0), (x-\overline{x}, y - \phi(\overline{x}))\rangle \leq 0, \forall (x, y) \in epi\ \phi \cap \left((\overline{x} + C_F, \mathbb{R}\right)$$
$$\Leftrightarrow \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq 0,\ \forall x \in dom\ \phi \cap (\overline{x} + C_F)$$
$$\Leftrightarrow x^* \in N_F(dom\ \phi, \overline{x}).$$

(3) Giả sử $x^* \in \partial_F \phi(\overline{x})$. Khi đó từ $x^* = 0 + x^*$ suy ra $\partial_F \phi(\overline{x}) \subset \partial_F^\infty \phi(\overline{x}) + \partial_F \phi(\overline{x})$.

Ngược lại, giả sử $x^* \in \partial_F^\infty \phi(\bar{x}) + \partial_F \phi(\bar{x})$, khi đó tồn tại $x_1^* \in \partial_F^\infty \phi(\bar{x})$, $x_2^* \in \partial_F \phi(\bar{x})$ và $x^* = x_1^* + x_2^*$ sao cho $(x_1^*, 0) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\bar{x}, \phi(\bar{x})))$ và $(x_2^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\bar{x}, \phi(\bar{x})))$. Suy ra

$$\langle (x_1^*, 0), (x,r) - (\bar{x}, \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x_1^*, 0), (x - \bar{x}, r - \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_F \times \mathbb{R}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x_1^*, 0), (x - \bar{x}, r - \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big(\bar{x} + C_F, \phi(\bar{x}) + \mathbb{R}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle x_1^*, x - \bar{x}\rangle \le 0,\ \forall x \in \bar{x} + C_F$$

và

$$\langle (x_2^*, -1), (x,r) - (\bar{x}, \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x_2^*, -1), (x - \bar{x}, r - \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_F \times \mathbb{R}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle x_2^*, x - \bar{x}\rangle - (r - \phi(\bar{x})) \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big(\bar{x} + C_F, \phi(\bar{x}) + \mathbb{R}\big).$$

Từ các tương đương này ta có

$$\langle x_1^*, x - \bar{x}\rangle + \langle x_2^*, x - \bar{x}\rangle - (r - \phi(\bar{x})) \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big(\bar{x} + C_F, \phi(\bar{x}) + \mathbb{R}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle x_1^* + x_2^*, x - \bar{x}\rangle - (r - \phi(\bar{x})) \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_F \times \mathbb{R}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x_1^* + x_2^*, -1), (x - \bar{x}, r - \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\big)$$
$$\Leftrightarrow \langle (x_1^* + x_2^*, -1), (x,r) - (\bar{x}, \phi(\bar{x}))\rangle \le 0,\ \forall (x,r) \in epi\ \phi \cap \big((\bar{x}, \phi(\bar{x})) + C_{F\times\mathbb{R}}\big).$$

Suy ra $(x_1^* + x_2^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\bar{x}, \phi(\bar{x})))$ hay $(x^*, -1) \in N_{F\times\mathbb{R}}(epi\ \phi, (\bar{x}, \phi(\bar{x})))$. Do đó $x^* \in \partial_F \phi(\bar{x})$. □

Cho hàm $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, lồi theo hướng F, nửa liên tục dưới, ta xét bất phương trình lồi sau.

$$\phi(x) \le 0. \qquad (2.4)$$

Gọi S là *tập nghiệm theo hướng* F tại $\bar{x}$ của (2.4), nghĩa là $S = \{x \in \bar{x} + C_F \mid \phi(x) \le 0\}$.

Giả sử $S \ne \emptyset$, bằng cách thay $N(S,\bar{x})$, $\partial^\infty \phi(\bar{x})$ và $\mathbb{R}^+ \partial\phi(\bar{x})$ bởi các $N_F(S,\bar{x})$, $\partial_F^\infty \phi(\bar{x})$ và $\mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x})$, chúng tôi giới thiệu định nghĩa BCQ theo hướng, BCQ mạnh theo hướng, BCQ mở rộng theo hướng và xét mối quan hệ giữa chúng như sau.

Định nghĩa 2.6. (1) Bất phương trình (2.4) được gọi là thỏa mãn *BCQ mở rộng theo hướng* F tại $\bar{x} \in \partial S$ nếu

$$N_F(S,\bar{x}) = \partial_F^\infty \phi(\bar{x}) + \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x}). \qquad (2.5)$$

(2) Bất phương trình (2.4) được gọi là thỏa mãn *BCQ mạnh theo hướng F tại* $\bar{x} \in \partial S$ nếu tồn tại $\tau \in (0, +\infty)$ sao cho

$$N_F(S,\bar{x}) \cap \mathbb{B} \subset \partial_F^\infty \phi(\bar{x}) + [0,\tau] \partial_F \phi(\bar{x}). \qquad (2.6)$$

(3) Khi ϕ là hàm liên tục, bất phương trình (2.4) được gọi là thỏa mãn *BCQ theo hướng* F tại $\bar{x} \in \partial S$ nếu

$$N_F(S,\bar{x}) = \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x}). \qquad (2.7)$$

Nhận xét 2.7. (1) Nếu $\{0\} \subset \operatorname{int} F$ thì (2.5), (2.6) và (2.7) lần lượt thành (1.5), (1.6) và (1.7).

(2) Với mọi $x^* \in \partial_F \phi(\bar{x})$ và $\bar{x} \in \partial S$, ta có $\langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le \phi(x) - \phi(\bar{x}) \le 0,\ \forall x \in \big(\bar{x} + C_F\big) \cap S.$

Suy ra $x^* \in N_F(S,\bar{x})$. Dẫn đến $\mathbb{R}^+ \partial\phi_F(\bar{x}) \subset N_F(S,\bar{x})$. Do đó, bất phương trình (2.4) thỏa mãn BCQ theo hướng F tại $\bar{x} \in \partial S$ khi và chỉ khi $N_F(S,\bar{x}) \subset \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x})$.

(3) Khi $\partial_F \phi(\bar{x}) = \emptyset$, ta có: BCQ mở rộng theo hướng F tại $\bar{x} \Leftrightarrow$ BCQ mạnh theo hướng F tại $\bar{x} \Leftrightarrow N_F(S,\bar{x}) = \partial_F^\infty \phi(\bar{x})$.

Thật vậy, giả sử (2.4) thỏa mãn BCQ mở rộng theo hướng F tại $\bar{x}$, ta có

$$N_F(S,\bar{x}) = \partial_F^\infty \phi(\bar{x}) + \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x}).$$

Do $\partial_F \phi(\bar{x}) = \emptyset$, ta có $N_F(S,\bar{x}) = \partial_F^\infty \phi(\bar{x})$.

Giả sử (2.4) thỏa mãn BCQ mạnh theo hướng F tại $\bar{x}$, ta có

$$N_F(S,\bar{x}) \cap \mathbb{B} \subset \partial_F^\infty \phi(\bar{x}) + [0,\tau] \partial\phi_F(\bar{x}).$$

Do $\partial_F \phi(\bar{x}) = \emptyset$, ta có $N_F(S,\bar{x}) \cap \mathbb{B} \subset \partial_F^\infty \phi(\bar{x})$. Lấy $x^* \in N_F(S,\bar{x})$ suy ra tồn tại $t > 0$ sao cho $tx^* \in N_F(S,\bar{x}) \cap \mathbb{B}$. Do đó $tx^* \in \partial_F^\infty \phi(x)$ suy ra $x^* \in \partial_F^\infty \phi(x)$. Dẫn đến $N_F(S,\bar{x}) \subset \partial_F^\infty \phi(\bar{x})$. Bao hàm ngược lại dễ dàng chứng minh được vì $\partial_F^\infty \phi(\bar{x}) = N_F(dom\ \phi, \bar{x}) \subset N_F(S,\bar{x})$. Vậy $N_F(S,\bar{x}) = \partial_F^\infty \phi(\bar{x})$.

(4) Khi ϕ liên tục, F là hình cầu đơn vị, ta có $\partial_F^\infty \phi(\bar{x}) = \{0\}$. Khi đó, $N_F(S,\bar{x}) = N(S,\bar{x})$, $\partial_F^\infty \phi(\bar{x}) = \partial^\infty \phi(\bar{x})$. Do đó theo [9], ta có

$\Rightarrow$ BCQ mạnh theo hướng F tại $\bar{x}$

$\Rightarrow$ BCQ mở rộng theo hướng F tại $\bar{x}$

$\Leftrightarrow$ BCQ theo hướng F tại $\bar{x}$.

Ví dụ sau đây chứng tỏ khái niệm BCQ theo hướng của chúng tôi là tổng quát hơn khái niệm BCQ trong [10].

Ví dụ 2.8. Cho $F_1 = (-1,0),\ F_2 = (0,1)$ và hàm $\phi(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

Khi đó ϕ không là hàm lồi nhưng ϕ lồi theo hướng F_1 và F_2 tại 0. Do đó, bất phương trình $\phi(x) \le 0$ không thỏa mãn BCQ tại 0 của Định nghĩa 1.7(3) nhưng $\phi(x) \le 0$ thỏa BCQ theo hướng F tại 0 của Định nghĩa 2.7 (3).

Thật vậy, ta có $C_{F_1} = \{tu,\ t \ge 0,\ u \in F_1\} = (-\infty, 0]$, $S = \{x \in (-\infty, 0] \mid \phi(x) \le 0\} = (-\infty, 0]$. Với $\lambda \in [0,1]$ và với $x, y \in (-\infty, 0]$, ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x = y = 0$. Ta có

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0 = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

Trường hợp 2. $x = 0, y < 0$. Ta có

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \phi((1-\lambda)y) = (1-\lambda)y = (1-\lambda)\phi(y) + \lambda\phi(x).$$

Trường hợp 3. $x < 0, y < 0$. Ta có

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

Vậy ϕ lồi theo hướng F_1 tại 0.

$C_{F_2} = \{tu,\ t \ge 0,\ u \in F_2\} = [0, +\infty)$. Với mỗi số thực $\lambda \in [0,1]$ và với $x, y \in [0, +\infty)$, ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x = y = 0$. Ta có

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0 = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

Trường hợp 2. $x = 0, y > 0$. Ta có

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \phi((1-\lambda)y) = (1-\lambda)^2 y^2 \le (1-\lambda)y^2 = (1-\lambda)\phi(y) + \lambda\phi(x).$$

Trường hợp 3. $x > 0, y > 0$. Ta có

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy$$

và

$$\lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2.$$

Từ đây ta có

$$\begin{aligned}
&\lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y) - \phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - (1-\lambda)^2 y - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= \lambda x^2(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&\ge 2\sqrt{\lambda x^2(1-\lambda)\lambda(1-\lambda)y^2} - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= 2\lambda(1-\lambda)xy - 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$.

Vậy ϕ lồi theo hướng F_2 tại 0.

Mặt khác, ta có

$$N_{F_1}(S,0) = \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \le 0,\ \forall x \le 0\} = [0, +\infty).$$

$$\begin{aligned}
\partial_{F_1}\phi(0) &= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \le \phi(x) - \phi(0),\ \forall x \in C_{F_1}\} \\
&= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \le x,\ \forall x \le 0\} = [1, +\infty).
\end{aligned}$$

Suy ra $N_{F_1}(S,0) = \mathbb{R}^+\partial_{F_1}\phi(0)$. Do đó $\phi(x) \le 0$ thỏa mãn BCQ theo hướng F_1 tại 0.

Tương tự ta có

$$N_{F_2}(S,0) = \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \le 0,\ \forall x \ge 0\} = (-\infty, 0].$$

$$\begin{aligned}
\partial_{F_2}\phi(0) &= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \le \phi(x) - \phi(0),\ \forall x \in C_{F_2}\} \\
&= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, 1\rangle \le x,\ \forall x \ge 0\} \\
&= \{x^* \in \mathbb{R} \mid x^* \le x,\ \forall x \ge 0\} \\
&= (-\infty, 0].
\end{aligned}$$

Suy ra $N_{F_2}(S,0) = \mathbb{R}^+\partial_{F_2}\phi(0)$. Do đó, ta có $\phi(x) \le 0$ thỏa BCQ theo hướng F_2 tại 0.

3. Điều kiện tối ưu theo hướng

Tiếp theo, chúng tôi xây dựng điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu theo hướng như sau.

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, lồi theo hướng F và $\phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, lồi theo hướng F, liên tục trên $\mathbb{R}^n$, xét các bài toán tối ưu sau.

Bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min f(x) \text{ với } x \in \mathbb{R}^n. \tag{PF}$$

Bài toán tối ưu ràng buộc

$$\min f(x) \text{ với } \phi(x) \le 0. \tag{CPF}$$

Giả sử $S = \{x \in \overline{x} + C_F \mid \phi(x) \le 0\}$ là tập chấp nhận được của bài toán (CPF).

Điểm $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *nghiệm của bài toán (CPF) theo hướng* F nếu $\phi(x) \ge \phi(\overline{x})$, $\forall x \in S \cap \left(\overline{x} + C_F\right)$.

Định lí 3.1 [8]. *$\overline{x}$ là nghiệm tối ưu theo hướng F của bài toán (PF) khi và chỉ khi* $0 \in \partial_F f(\overline{x})$.

Từ [7, Định lí 5.1] ta có kết quả sau cho đặc trưng của điểm chấp nhận được $\overline{x}$ là nghiệm theo hướng F của bài toán tối ưu (CPF).

Định lí 3.2. *Cho $\overline{x}$ là điểm chấp nhận được của bài toán (CPF) và bất phương trình $\phi(x) \le 0$ thỏa mãn BCQ theo hướng F tại $\overline{x}$ và*

$ri\,dom f \cap ri\, S \cap ri\left(\bar{x}+C_F\right) \neq \emptyset$. Khi đó $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu theo hướng F của bài toán (CPF) khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \geq 0$ sao cho

$$0 \in \partial_F f(\bar{x}) + \lambda \partial_F \phi(\bar{x}).$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử δ_S là hàm chỉ trên S. Khi đó $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu theo hướng F của bài toán

$$\min\ (f+\delta_S)(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Do đó, theo Định lí 3.1, ta có $0 \in \partial_F (f+\delta_S)(\bar{x})$. Vì $ri\, dom f \cap ri\, S \cap ri\left(\bar{x}+C_F\right) \neq \emptyset$ nên theo [8, Định lí 2.5], ta có $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + \partial_F \delta_S(\bar{x})$. Từ $\partial_F \delta_S(\bar{x}) = N_F(S,\bar{x})$, ta có $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + N_F(S,\bar{x})$. Vì bất phương trình $\phi(x) \leq 0$ thỏa mãn BCQ theo hướng F nên $N_F(S,\bar{x}) = \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x})$. Do đó $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x})$. Vì vậy $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + \lambda \partial_F \phi(\bar{x})$, $\lambda \geq 0$.

Điều kiện đủ. Giả sử $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + \lambda \partial_F \phi(\bar{x})$, $\lambda \geq 0$. Khi đó ta có $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x})$.

Do bất phương trình $\phi(x) \leq 0$ thỏa mãn BCQ theo hướng F ta có $N_F(S,\bar{x}) = \mathbb{R}^+ \partial_F \phi(\bar{x})$ nên $0 \in \partial_F f(\bar{x}) + N_F(S,\bar{x})$. Khi đó tồn tại $\xi \in \partial_F f(\bar{x})$ sao cho $-\xi \in N_F(S,\bar{x})$. Từ $-\xi \in N_F(S,\bar{x})$ ta có

$$\langle -\xi, x-\bar{x} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle \xi, x-\bar{x} \rangle \geq 0. \qquad (2.8)$$

Từ $\xi \in \partial_F f(\bar{x})$ ta có

$$\langle \xi, x-\bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}),\ \forall x \in S \cap (\bar{x}+C_F). \quad (2.9)$$

Kết hợp (2.8) và (2.9) ta có

$$f(x) \geq f(\bar{x}),\ \forall x \in S \cap (\bar{x}+C_F). \qquad \square$$

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ sau minh họa kết quả đạt được trong Định lí 3.2.

Ví dụ 3.3. Cho $F = (-1,0) \subset \mathbb{R}$ và bài toán tối ưu ràng buộc

$$\min f(x) \text{ với } \phi(x) \leq 0,$$

trong đó $f(x)$, $\phi(x)$ lần lượt xác định như sau.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \phi(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Khi đó $C_F = \{tu,\ t \geq 0,\ u \in F\} = (-\infty, 0]$, $S = \{x \in (-\infty,0] \mid \phi(x) \leq 0\} = (-\infty,0]$. Theo Ví dụ 2.8, ta có $\partial_F \phi(0) = [1,+\infty)$ và bất phương trình $\phi(x) \leq 0$ thỏa BCQ theo hướng F tại $x = 0$.

Mặt khác, ta có $ri\, dom f \cap ri\, S \cap ri\left(0+C_F\right) \neq \emptyset$ và

$$\begin{aligned} \partial_F f(0) &= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \leq f(x) - f(0),\ \forall x \in C_F\} \\ &= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, x\rangle \leq x^2,\ \forall x \leq 0\} \\ &= \{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, 1\rangle \geq x,\ \forall x \leq 0\} \\ &= \{x^* \in \mathbb{R} \mid x^* \geq x,\ \forall x \leq 0\} \\ &= [0,+\infty). \end{aligned}$$

Chọn $x_1^* = 0$, $x_2^* \geq 1$, $\lambda = 0$. Khi đó, $x_1^* \in \partial_F f(0)$, $x_2^* \in \partial_F \phi(0)$ và $x_1^* + \lambda x_2^* = 0$. Do đó $0 \in \partial_F f(0) + \lambda \partial_F \phi(0)$. Theo Định lí 3.2, ta có $x = 0$ là nghiệm theo hướng F tại $\bar{x}$ của bài toán.

Bài báo này được hỗ trợ bởi Đề tài cấp cơ sở mã số CS.2015.01.25 tại Trường Đại học Đồng Tháp.

Tài liệu tham khảo

[1] H. H. Bauschke, J. M. Borwein and W. Li (1999), "Strong conical hull intersection property, bounded linear regularity, Jameson's property (G), and error bounds in convex optimization", *Math. Program.*, (86), p. 135-160.

[2] A. Dhara, J. Dutta (2012), *Optimality conditions in convex optimization: a finite-dimensional view*, CRC Press, Boca Raton.

[3] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal (1993), *Convex analysis and minimization Algorithmsi*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany.

[4] H. Hu (2005), "Characterizations of the strong basic constraint qualifications", *Math. Oper. Res.*, (30), p. 956-965.

[5] W. Li, C. Nahak, and I. Singer (2000), “Constraint qualifications for semi-infinite systems of convex inequalities”, *SIAM J. Optim.*, (11), p. 31-52.

[6] C. Li and K. F. Ng (2003), “Constraint qualification, the strong CHIP, and best approximation with convex constraints in Banach spaces”, *SIAM J. Optim.*, (14), p. 584-607.

[7]. C. Li, K. F. Ng and T. K. Pong (2008), “Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization”, *SIAM J. Optim.*, (19), p. 163-187.

[8]. Nguyễn Thị Thanh Thảo và Võ Đức Thịnh (2016), “Dưới vi phân lồi theo hướng và ứng dụng”, Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, đã nhận đăng.

[9]. D. Tiba and C. Zămlinescu (2004), “On the Necessity of some Constraint Qualification Conditions in Convex Programming”, *J. Convex Anal*, (11), p. 95-110.

[10]. X. Y. Zheng and K. F. Ng (2004), “Metric regularity and constraint qualifications for convex inequalities on Banach spaces”, *SIAM J. Optim.*, (14), p. 757-772.

THE DIRECTIONALLY BCQ AND STRONG BCQ OF SOLUTION SET FOR CONVEX INEQUALITIES AND APPLICATIONS

Summary

In this paper, we introduce new notions of constraint qualifications, including directionally BCQ, directionally strong BCQ and directionally extended BCQ. We also study relationships among these constraint qualifications and their applications in optimization problems of directionally convex inequalities.

Keyword: Directionally convex function, directionally BCQ, directionally strong BCQ, directionally extended BCQ.

Ngày nhận bài: 26/02/2016; Ngày nhận lại: 19/4/2016; Ngày duyệt đăng: 27/4/2016.