NÓN PHÁP TUYẾN THEO HƯỚNG VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

• ThS. Võ Đức Thịnh(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của nón pháp tuyến Fréchet theo hướng và nón pháp tuyến qua giới hạn theo hướng. Đồng thời, chúng tôi cải biến định nghĩa của nón pháp tuyến qua giới hạn theo hướng và nghiên cứu một số tính chất của nón cải biến này. Sau đó, chúng tôi đưa ra những ví dụ minh họa cho sự khác nhau giữa các nón pháp tuyến theo hướng. Cuối cùng, chúng tôi xây dựng các khái niệm dưới vi phân theo hướng thông qua các nón pháp tuyến theo hướng. Bằng cách sử dụng dưới vi phân theo hướng, chúng tôi chỉ ra điều kiện cần cho nghiệm tối ưu theo hướng của một bài toán tối ưu.

Từ khóa: Nón pháp tuyến theo hướng, dưới vi phân theo hướng, điều kiện tối ưu.

1. Giới thiệu và tổng quan

Lý thuyết tối ưu là một lĩnh vực quan trọng của toán học. Trong lý thuyết tối ưu, các tác giả quan tâm đến bài toán sau (xem [2], [3], [5], [6] và các tài liệu tham khảo).

$$\min_{x\in D} f(x), \qquad \text{(P)}$$

trong đó $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm nửa liên tục dưới và D là tập con của không gian X.

Trong phạm vi bài báo này, chúng tôi đặc trưng điều kiện cần cho nghiệm của bài toán (P) thông qua dưới vi phân theo hướng. Chúng tôi luôn giả thiết X là không gian Banach; $B(x;r)$ là hình cầu tâm x bán kính *r; B* là hình cầu đơn vị của X và $\Pi(x_0,\Omega) := \arg\min_{x\in\Omega}\|x-x_0\|$ là *tập các ảnh của phép chiếu vuông góc* từ x_0 lên Ω. Một tập $\Omega \subset X$ được gọi là *đóng địa phương xung quanh* x nếu tồn tại lân cận U của x sao cho $\Omega \cap U$ là tập đóng. Ngoài ra, các kí hiệu $C_Q, x \xrightarrow{\Omega} x_0$ và $x \xrightarrow{\Omega,Q} x_0$ được định nghĩa như trong [3].

Bây giờ, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm sau.

Định nghĩa 1.1. Cho không gian Banach X và tập $D \subset X$. Điểm $x_0 \in D$ được gọi là *nghiệm tối ưu địa phương* của bài toán (P) nếu tồn tại số thực $r > 0$ sao cho

$$f(x_0) \le f(x)\ \forall x \in B(x_0,r) \cap \mathrm{D}. \qquad (1.1)$$

Năm 1994, B. S. Mordukhovich [5] đã giới thiệu các nón pháp tuyến như sau.

Định nghĩa 1.2. Cho không gian Banach X, $\varepsilon \ge 0$ và tập $\Omega \subset X$. Điểm $x^* \in X^*$ được gọi là một *ε-pháp tuyến* của Ω tại $x_0 \in \Omega$ nếu

$$\limsup_{x \xrightarrow{\Omega} x_0} \frac{\langle x^*, x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|} \le \varepsilon.$$

Tập tất cả các *ε-pháp tuyến* của Ω tại $x_0 \in \Omega$ được kí hiệu là $\hat{N}_\varepsilon(x_0,\Omega)$. Theo định nghĩa ta có

$$\hat{N}_\varepsilon(x_0,\Omega) := \left\{ x^* \in X^* \mid \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} x_0} \frac{\langle x^*, x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|} \le \varepsilon \right\}.$$

Nếu $x_0 \notin \Omega$ thì chúng ta qui ước $\hat{N}_\varepsilon(x_0,\Omega) := \varnothing$. Nếu $\varepsilon = 0$ thì chúng ta viết $\hat{N}(x_0,\Omega)$ thay $\hat{N}_0(x_0,\Omega)$ và gọi là *nón pháp tuyến Fréchet*.

Nón pháp tuyến qua giới hạn của Ω tại x_0 được kí hiệu là $N(x_0,\Omega)$ và xác định như sau:

$$N(x_0,\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ x \xrightarrow{\Omega} x_0}} \hat{N}_\varepsilon(x,\Omega),$$

trong đó nếu $F: X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị từ X vào Y thì

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} F(x) := \left\{ \begin{array}{l} y \in Y \mid \exists \text{ dãy } x_n \to x_0, \\ \exists \text{ dãy } y_n \in F(x_n) \text{ với } y_n \to y \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Nhận xét 1.3. *Với mọi* $x_0 \in \Omega \subset X$ *ta có* $N(x_0,\Omega) \supset \hat{N}(x_0,\Omega)$.

(*) Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Ngoài ra, một số tính chất của nón pháp tuyến Fréchet và nón pháp qua giới hạn cũng được tác giả chỉ ra [5]. Cụ thể chúng ta có các mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.4. *Cho X_1, X_2 là các không gian Banach, Ω_1 là các tập con của X_1, Ω_2 là các tập con của X_2, $x_1 \in \Omega_1$ và $x_2 \in \Omega_2$. Khi đó ta có*

(1) $\hat{N}(\overline{x},\Omega) = \hat{N}(x_1,\Omega_1) \times \hat{N}(x_2,\Omega_2)$, (1.2)

(2) $N(\overline{x},\Omega) = N(x_1,\Omega_1) \times N(x_2,\Omega_2)$, (1.3)

trong đó $\overline{x} = (x_1; x_2) \in \Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \subset X_1 \times X_2$.

Mệnh đề 1.5. *Nếu Ω là tập lồi, $x_0 \in \Omega$ và U là một lân cận của x_0 thì*

$$N(x_0,\Omega) = \left\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - x_0 \rangle \le 0, \forall x \in \Omega \cap U \right\}. \quad (1.4)$$

Trong [5], B. S. Mordukhovich đã đặc trưng tính chất của nón pháp tuyến qua giới hạn trong không gian hữu hạn chiều. Tính chất này giúp chúng ta thuận lợi hơn trong việc mô tả các nón pháp tuyến qua giới hạn trong không gian hữu hạn chiều. Cụ thể chúng ta có định lí sau.

Định lí 1.6. *Giả sử $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ với Ω là các tập đóng địa phương quanh x_0. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(1) $N(x_0,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \hat{N}(x,\Omega)$,

(2) $N(x_0,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \left[\operatorname{cone}(x - \Pi(x,\Omega)) \right]$,

trong đó $\Pi(x,\Omega)$ là tập các ảnh của phép chiếu vuông góc từ x lên Ω.

Từ các nón pháp tuyến này, B. S. Mordukhovich [5] đã giới thiệu khái niệm đối đạo hàm Fréchet, đối đạo hàm qua giới hạn và dưới vi phân qua giới hạn,... Từ đó, tác giả đặc trưng các tính chất như Lipschitz, giả Lipschitz, mêtric chính qui,... của ánh xạ đa trị thông qua các đối đạo hàm cũng như xây dựng các điều kiện cần và điều kiện đủ cho nghiệm tối ưu của bài toán (P).

Năm 2011-2012, F. Ginchev và B. S. Mordukhovich [2], [3] đã giới thiệu nón pháp tuyến qua giới hạn tương ứng với một tập thông qua khái niệm nón pháp tuyến Fréchet tương ứng với một tập như sau.

Định nghĩa 1.7. Cho X là một không gian Banach, $\varepsilon \ge 0$, Ω, Q là các tập con của X và $x_0 \in X$. Khi đó với mọi $\delta > 0$, đặt $Q_\delta := Q + \delta B$. Điểm $x^* \in X^*$ được gọi là một *ε-pháp tuyến tương ứng với tập Q* của Ω tại $x_0 \in \Omega$ nếu $\limsup_{x \xrightarrow{\Omega,Q} x_0} \dfrac{\langle x^*, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \le \varepsilon.$

Tập tất cả các *ε-pháp tuyến tương ứng với tập Q* của Ω tại x_0 được kí hiệu là $\hat{N}_{\varepsilon,Q}(x_0,\Omega)$. Theo định nghĩa ta có

$$\hat{N}_{\varepsilon,Q}(x_0,\Omega) := \hat{N}_\varepsilon(x_0, \Omega \cap (x_0 + C_Q)). \quad (1.5)$$

Nếu $\varepsilon = 0$ thì chúng ta viết $\hat{N}_Q(x_0,\Omega)$ thay cho $\hat{N}_{0,Q}(x_0,\Omega)$ và gọi là *nón pháp tuyến Fréchet tương ứng với tập Q* của Ω tại x_0. Nếu $x_0 \notin \Omega$ thì chúng ta đặt $\hat{N}_Q(x_0,\Omega) := \emptyset$.

Nón pháp tuyến qua giới hạn tương ứng với tập Q của Ω tại $x_0 \in \Omega$ được xác định như sau:

$$N_Q^G(x_0,\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{\varepsilon \to 0^+, \delta \to 0^+ \\ x \xrightarrow{\Omega,Q} x_0}} \hat{N}_{\varepsilon,Q_\delta}(x,\Omega), \quad (1.6)$$

trong đó $x \xrightarrow{\Omega,Q} x_0$ nghĩa là $x \to x_0, x \in \Omega$ và $\lim_{x \to x_0} d\left(\dfrac{x - x_0}{\|x - x_0\|}; Q \right) \to 0.$

Từ đó, các tác giả xây dựng khái niệm dưới vi phân theo hướng và xây dựng một số qui tắc tính cho dưới vi phân theo hướng qua giới hạn trong một số trường hợp cụ thể. Trong [3], các tác giả đã thiết lập các điều kiện cần và đủ cho một điểm x_0 cho trước là nghiệm tối ưu địa phương cho một trường hợp cụ thể của bài toán (P).

Trong bài báo này, trên cơ sở các khái niệm nón pháp tuyến trong [2], [3], chúng tôi đưa ra một khái niệm nón pháp tuyến khác (cụ thể thay $\delta > 0$ bởi $\delta \ge 0$). Sau đó, chúng tôi xây dựng các mệnh đề, các ví dụ để so sánh nón pháp tuyến mới này với các nón pháp tuyến trong [3].

2. Kết quả chính

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một khái niệm khác về nón pháp tuyến qua giới hạn theo hướng. Sau đó, chúng tôi trình bày một số tính chất của nón pháp tuyến đó và đưa ra ví dụ chứng minh rằng các tính chất này không đúng cho nón pháp tuyến qua giới hạn trong [3]. Trước hết, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.1. Cho X là một không gian Banach, Ω, Q là các tập con của X và $x_0 \in X$. Khi đó với mọi $\delta \ge 0$ đặt $Q_\delta := Q + \delta B$, một *nón pháp tuyến qua giới hạn tương ứng với tập* Q của Ω tại $x_0 \in \Omega$ được xác định như sau:

$$N_Q(x_0,\Omega) := \operatorname*{Limsup}_{\substack{\varepsilon\to 0^+,\delta\to 0^+\\ x\xrightarrow{\Omega,Q}x_0}} \hat{N}_{\varepsilon,Q_\delta}(x,\Omega). \quad (2.1)$$

Chú ý rằng trong Định nghĩa 2.1, số δ có thể bằng 0 khác với điều kiện $\delta > 0$ trong Định nghĩa 1.7. Ví dụ sau chỉ ra rằng hai nón pháp tuyến trong Định nghĩa 1.7 và Định nghĩa 2.1 là khác nhau.

Ví dụ 2.2. Xét $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,x_2) \mid x_2 < -|x_1|\}$, $Q := \{(x_1,x_2)\in\Omega \mid x_1 \ge 0\}$, $\bar{x} = (0,0)$. Khi đó $N_Q(\bar{x},\Omega) = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \le x_2 \le 0\}$. Bây giờ với bất kì $\delta>0$ thì $C_{Q_\delta} = \mathbb{R}^2$. Do đó $\Omega\cap(\bar{x}+C_{Q_\delta}) = \Omega$ và cho bất kì $x \xrightarrow{\Omega,Q} \bar{x}$ ta có:

$$\widehat{N}_{Q_\delta}(x;\Omega) = \begin{cases} \{(x_1,x_2) \mid x_1 = -x_2 + 2x_1^0, x_1 \ge x_2\} \\ \text{nếu } x = (x_1^0, x_1^0) \ne (0,0); \\ \{(x_1,x_2) \mid x_1 = x_2 + 2x_1^0, x_2 \le -x_1\} \\ \text{nếu } x = (x_1^0, -x_1^0) \ne (0,0); \\ \{0\} \text{ nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Do đó

$$N_Q^G(\bar{x},\Omega) = \{(x_1,x_2) \mid x_1 = x_2 \le 0 \text{ hay } x_1 = -x_2 \le 0\}.$$

Bằng tính toán trực tiếp ta có

$$N_Q(\bar{x},\Omega) = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \le 0 \wedge x_2 \le -x_1\}.$$

Dưới đây, chúng tôi xây dựng một số tính chất của nón pháp tuyến theo Định nghĩa 2.1 tương ứng với tính chất (1.2) và (1.3) của nón pháp tuyến qua giới hạn. Chú ý rằng, một số tính chất sẽ không đúng cho nón pháp tuyến theo Định nghĩa 1.7 và khi đó chúng tôi sẽ xây dựng những ví dụ minh họa để làm rõ sự khác nhau này.

Định lí 2.3. *Giả sử* X_1, X_2 *là hai không gian Banach,* $X = X_1\times X_2, Q = Q_1\times Q_2$, $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$ *và* $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \Omega$. *Khi đó ta có các khẳng định sau.*

(1) $\hat{N}_Q(x_0,\Omega) = \hat{N}_{Q_1}(x_1^0,\Omega_1)\times\hat{N}_{Q_2}(x_2^0,\Omega_2)$.

(2) $N_Q(x_0,\Omega) = N_{Q_1}(x_1^0,\Omega_1)\times N_{Q_2}(x_2^0,\Omega_2)$.

Chứng minh. Vì nón tiền pháp tuyến không phụ thuộc vào các chuẩn tương đương trên X_1 và X_2, chúng ta có thể cố định một chuẩn bất kì trên các không gian này và định nghĩa chuẩn trên không gian tích X bởi

$$\|(x_1,x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|.$$

Với bất kì $\varepsilon \ge 0, \delta \ge 0, \bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in \Omega$ ta lấy $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \hat{N}_{\varepsilon,Q_\delta}(x_0,\Omega)$ với $x_1^* \in X_1^*, x_2^* \in X_2^*$, ta tìm được lân cận $U = U_1 \times U_2$ của x sao cho $x \in \Omega \cap (\bar{x} + C_{Q_\delta}) \cap U$ ta có

$$\langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le 2\varepsilon \| x - \bar{x} \|.$$

Do đó

$$\langle x_1^*, x_1 - \bar{x}_1\rangle + \langle x_2^*, x_2 - \bar{x}_2\rangle \le 2\varepsilon\left(\| x_1 - \bar{x}_1 \| + \| x_2 - \bar{x}_2 \|\right)$$

với $x_i \in \Omega_i \cap (\bar{x}_i + C_{Q_{i\delta}}) \cap U_i$, với mọi $i = 1,2$.

Chọn $x_2 = \bar{x}_2$. Khi đó với bất kì $\theta > 0, x_1 \in \Omega_1 \cap (\bar{x}_1 + C_{Q_{1\delta}}) \cap U_1$, ta có

$$\langle x_1^*, x_1 - \bar{x}_1\rangle \le 2\varepsilon \| x_1 - \bar{x}_1 \|. \quad (2.2)$$

Suy ra $x_1^* \in \hat{N}_{2\varepsilon,Q_{1\delta}}(\bar{x}_1,\Omega_1)$.

Chọn $x_1 = \bar{x}_1$. Khi đó cho bất kì $\theta > 0, x_2 \in \Omega_2 \cap (\bar{x}_2 + C_{Q_{2\delta}}) \cap U_2$ ta có

$$\langle x_2^*, x_2 - \bar{x}_2\rangle \le 2\varepsilon \| x_2 - \bar{x}_2 \|. \quad (2.3)$$

Suy ra $x_2^* \in \hat{N}_{2\varepsilon,Q_{2\delta}}(\bar{x}_2,\Omega_2)$. Do đó $x^* \in \hat{N}_{2\varepsilon,Q_{1\delta}}(\bar{x}_1,\Omega_1)\times\hat{N}_{2\varepsilon,Q_{2\delta}}(\bar{x}_2,\Omega_2)$. Điều này suy ra $\hat{N}_{\varepsilon,Q_\delta}(\bar{x},\Omega) \subset \hat{N}_{2\varepsilon,Q_{1\delta}}(\bar{x}_1,\Omega_1)\times\hat{N}_{2\varepsilon,Q_{2\delta}}(\bar{x}_2,\Omega_2)$.

Ngược lại, lấy $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \hat{N}_{2\varepsilon,Q_{1\delta}}(\bar{x}_1,\Omega_1)\times\hat{N}_{2\varepsilon,Q_{2\delta}}(\bar{x}_2,\Omega_2)$, ta tìm được các lân cân U_1, U_2 của x_1, x_2 sao cho (2.2) và (2.3) được thỏa mãn. Đặt $U := U_1 \times U_2$, khi đó với bất kì $x = (x_1,x_2) \in \Omega \cap (\bar{x} + C_{Q_\delta}) \cap U$ thì $x_1 \in \Omega_1 \cap (\bar{x}_1 + C_{Q_{1\delta}}) \cap U_1, x_2 \in \Omega_2 \cap (\bar{x}_2 + C_{Q_{2\delta}}) \cap U_2$.

Ta có

$$\langle x_1^*, x_1 - \bar{x}_1\rangle \le 3\varepsilon \| x_1 - \bar{x}_1 \|; \quad \langle x_2^*, x_2 - \bar{x}_2\rangle \le 3\varepsilon \| x_2 - \bar{x}_2 \|.$$

Do đó

$$\langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le 3\varepsilon\left(\| x_1 - \bar{x}_1 \| + \| x_2 - \bar{x}_2 \|\right) = 3\varepsilon \| x - \bar{x} \|.$$

Suy ra $x^* \in \hat{N}_{3\varepsilon,Q_\delta}(\bar{x},\Omega)$. Khi đó với bất kì $\varepsilon \geq 0$, ta có

$$\hat{N}_{\varepsilon,Q_\delta}(\bar{x},\Omega) \subset \hat{N}_{2\varepsilon,Q_\delta}(\bar{x}_1,\Omega_1) \times \hat{N}_{2\varepsilon,Q_{2\delta}}(\bar{x}_2,\Omega_2) \subset \hat{N}_{3\varepsilon,Q_\delta}(\bar{x},\Omega). \quad (2.4)$$

Cho $\varepsilon = 0$, $\bar{x} = x_0$ trong (2.4) ta được (1). Lấy giới hạn trong (2.4) khi $\varepsilon \to 0, \bar{x} \to x_0$ ta được (2). Do đó định lí được chứng minh. □

Sau đây, chúng tôi sẽ xây dựng một tính chất tương tự cho nón pháp tuyến qua giới hạn theo hướng thông qua định lí sau.

Định lí 2.4. *Giả sử $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ và $Q \subset \mathbb{R}^n$ sao cho Ω và $(x_0 + C_Q)$ là các tập đóng địa phương xung quanh x_0 và $C_Q + C_Q \subset C_Q$. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

(1) $N_Q(x_0,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \hat{N}_Q(x,\Omega)$,

(2) $N_Q(x_0,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0}\left[\operatorname{cone}(x - \Pi(x, \Omega \cap (x_0 + C_Q)))\right]$.

Chứng minh. Trước tiên chúng ta chứng minh (1), nghĩa là chúng ta có thể lấy $\varepsilon, \delta = 0$ trong Định nghĩa 2.1 về nón pháp tuyến theo hướng cho tập đóng địa phương trong không gian hữu hạn chiều. Chú ý rằng

$$N_Q(x_0,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0;\varepsilon \to 0^+;\delta \to 0^+} \hat{N}_{\varepsilon,Q_\delta}(x,\Omega) \supset \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \hat{N}_Q(x,\Omega).$$

Chúng ta chỉ cần chứng minh bao hàm thức ngược lại. Cố định $x^* \in N_Q(x_0,\Omega)$ ta tìm được các dãy $\delta_k \searrow 0$, $\varepsilon_k \searrow 0$, $x_k \xrightarrow{\Omega,Q} x_0$ và $x_k^* \to x^*$ sao cho $x_k^* \in \hat{N}_{\varepsilon_k,Q_{\delta_k}}(x_k,\Omega)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vì $X = X^* = \mathbb{R}^n$ và các tập $\Omega, x_0 + C_Q$ là đóng địa phương xung quanh x_0 nên với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho bất kì $\alpha > 0$ tồn tại $w_k \in \Pi(x_k + \alpha x_k^*, \Omega \cap (x_0 + C_Q))$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\left\|x_k + \alpha x_k^* - w_k\right\|^2 \leq \alpha^2 \left\|x_k^*\right\|^2.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử chuẩn đang xét là chuẩn Euclid, ta có

$$\left\|x_k + \alpha x_k^* - w_k\right\|^2 = \left\|x_k - w_k\right\|^2 + 2\alpha\langle x_k^*, x_k - w_k\rangle + \alpha^2\left\|x_k^*\right\|^2.$$

Do đó ta có

$$\left\|x_k - w_k\right\|^2 \leq 2\alpha\langle x^*, w_k - x_k\rangle, \forall \alpha > 0. \quad (2.5)$$

Vì $w_k \to x_k$ khi $\alpha \searrow 0$ và $x_k^* \in \hat{N}_{\varepsilon_k,Q_{\delta_k}}(x_k,\Omega)$, $w_k \in \Omega \cap (x_0 + C_Q) \subset \Omega \cap (x_0 + C_{Q_{\delta_k}})$, suy ra $\langle x_k^*, w_k - x_k\rangle \leq 2\varepsilon_k \left\|w_k - x\right\|_k$. Kết hợp với (2.5), ta có $\left\|x_k - w_k\right\| \leq 4\alpha_k\varepsilon_k$, trong đó $\alpha_k := \alpha$. Suy ra $w_k \xrightarrow{\Omega \cap (x_0 + C_Q)} x_0$ khi $k \to +\infty$.

Hơn nữa, đặt $w_k^* := x_k^* + \dfrac{1}{\alpha_k}(x_k - w_k)$, ta có $\left\|w_k^* - x_k^*\right\| \leq 4\varepsilon_k$ và $w_k^* \to x^*$ khi $k \to +\infty$. Ta sẽ chỉ ra rằng $w_k^* \in \hat{N}_Q(w_k,\Omega)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Thật vậy, cố định $k \in \mathbb{N}$ và với mọi điểm cho trước $x \in \Omega \cap (w_k + C_Q)$ khi đó $x \in x_0 + C_Q + C_Q \subset x_0 + C_Q$, ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\|x_k + \alpha_k x_k^* - x\right\|^2 - \left\|x_k + \alpha_k x_k^* - w_k\right\|^2 \\
&= \langle \alpha_k x_k^* + x_k - x, \alpha_k x_k^* + x_k - w_k\rangle - \langle x_k + \alpha_k x_k^* - x, w_k - x\rangle \\
&\quad - \langle \alpha_k x_k^* + x_k - w_k, x - w_k\rangle - \langle \alpha_k x_k^* + x_k - w_k, \alpha_k x_k^* + x_k - x\rangle \\
&= -2\alpha_k\langle w_k^*, x - w_k\rangle + \left\|x - w_k\right\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó $\langle w_k^*, x - x_k\rangle \leq \dfrac{1}{2\alpha_k}\left\|x - w_k\right\|^2$ với mọi $x \in \Omega \cap (w_k + C_Q)$. (2.6)

Với bất kì $\varepsilon > 0$ ta tìm được lân cận $U(w_k,\varepsilon)$ của w_k sao cho với mọi $x \in U(w_k,\varepsilon)$ ta có $\left\|x - w_k\right\| \leq 2\alpha_k\varepsilon$. Vì vậy $w_k^* \in \hat{N}_Q(w_k,\Omega)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Sử dụng định nghĩa của nón pháp tuyến qua giới hạn tương ứng với tập Q ta có $x^* \in N_Q(x_0,\Omega)$. Do đó (1) được chứng minh.

Để chứng minh (2), ta cần chứng minh

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \hat{N}_Q(x,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0}\left[\operatorname{cone}(x - \Pi(x, \Omega \cap (x + C_Q)))\right].$$

Quan sát rằng $\hat{N}_Q(x,\Omega) = \hat{N}(x, \Omega \cap (x + C_Q))$. Sử dụng chứng minh trong Định lí 1.6 [3] ta có

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \hat{N}(x, \Omega \cap (x + C_Q)) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0}\left[\operatorname{cone}(x - \Pi(x, \Omega \cap (x + C_Q)))\right].$$

Do đó ta có

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \hat{N}_Q(x,\Omega) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0}\left[\operatorname{cone}(x - \Pi(x, \Omega \cap (x + C_Q)))\right].$$

Vậy định lí được chứng minh. □

Chú ý rằng Định lí 2.4 không đúng cho nón pháp tuyến theo hướng qua giới hạn trong Định nghĩa 1.1. Thật vậy, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2.5. Cho Ω và Q như trong Ví dụ 2.2. Khi đó với $\overline{x}=(0,0)$ thì theo kết quả trong Ví dụ 2.2 ta thấy rằng Định lí 2.4 không thỏa mãn cho nón pháp tuyến theo hướng qua giới hạn trong Định nghĩa 1.7.

Định lí 2.6. *Giả sử* Ω *và* Q *là các tập con của* X, U *là một lân cận của điểm* $x_0 \in \Omega$ *sao cho* $\Omega \cap (x_0 + C_Q) \cap U$ *là tập lồi. Khi đó với mọi* $\varepsilon \geq 0$ *ta có*

$$\hat{N}_{\varepsilon,Q}(x_0,\Omega) = \{x^* \in X \mid \langle x^*, x - x_0\rangle \leq \varepsilon\|x - x_0\| \ \forall x \in \Omega \cap (x_0 + C_Q) \cap U\}.$$

Chứng minh. Chú ý rằng bao hàm thức "$\supset$" trong biểu thức trên đạt được từ định nghĩa với bất kì tập Ω, Q và bất kì lân cận U của x_0. Chúng ta chỉ cần chứng minh chiều ngược lại khi $\Omega \cap (x_0 + C_Q)\} \cap U$ là tập lồi. Bây giờ, lấy bất kì $x^* \in \hat{N}_{\varepsilon,Q}(\overline{x},\Omega)$ và cố định điểm $x \in \Omega \cap (x_0 + C_Q) \cap U$. Khi đó ta có $x_\alpha := x_0 + \alpha(x - x_0) \in \Omega \cap (x_0 + C_Q) \cap U$ với mọi $0 \leq \alpha \leq 1$ do tính lồi của tập $\Omega \cap (x_0 + C_Q) \cap U$. Hơn nữa, dãy $x_\alpha \to x_0$ khi $\alpha \to 0^+$. Lấy bất kì $\gamma > 0$, ta có $\langle x^*, x_\alpha - x_0\rangle \leq (\varepsilon + \gamma)\|x_\alpha - x_0\|$ khi $1 \geq \alpha \geq 0$. Định lí được chứng minh. □

Sau đây, chúng tôi giới thiệu khái niệm dưới vi phân theo hướng thông qua khái niệm nón pháp tuyến theo hướng và áp dụng dưới vi phân theo hướng để tìm điều kiện cần cho nghiệm tối ưu của bài toán (P). Trước hết, chúng tôi sẽ giới thiệu khái niệm cực tiểu tương ứng với một tập như sau.

Định nghĩa 2.8. Cho f là một hàm nửa liên tục dưới từ không gian Banach X vào $\mathbb{R}$. Điểm $x_0 \in X$ được gọi là *cực tiểu địa phương tương ứng với* $Q \subset X \setminus \{0\}$ của f nếu tồn tại $r > 0, \delta > 0$ sao cho

$$f(x) \geq f(x_0) \ \ \forall x \in D_Q(x_0,\delta,r),$$

trong đó $D_Q(x_0,\delta,r) := (x_0 + C_{Q_\delta}) \cap B(x_0,r)$.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu khái niệm dưới vi phân theo hướng thông qua khái niệm nón pháp tuyến theo hướng. Sau đó chúng tôi sử dụng dưới vi phân theo hướng để đặc trưng điều kiện cần cho nghiệm cực tiểu theo hướng của một hàm số f.

Cho $f: X \to \mathbb{R}$ là một hàm nửa liên tục dưới. Khi đó ta có các kí hiệu sau

$$domf := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \text{ và}$$
$$epif := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in domf, r \geq f(x)\}.$$

Định nghĩa 2.9. Cho Ω, Q là các tập con đóng của X và $x_0 \in \Omega$. *Dưới vi phân qua giới hạn tương ứng với* Q của f được xác định bởi

$$\partial_Q f(x_0) := \{x^* \in X^* \mid (x^*,-1) \in N_Q((x_0, f(x_0)), epif)\}.$$

Nếu $Q = \{u\}$ với $u \neq 0$ thì ta kí hiệu $\partial_u f(x_0)$ thay $\partial_{\{u\}} f(x_0)$ và gọi là *dưới vi phân qua giới hạn theo hướng* u của f tại x_0.

Định lí 2.10. *Nếu* x_0 *là cực tiểu địa phương tương ứng với* $Q \subset X \setminus \{0\}$ *của* f *thì* $0 \in \partial_Q f(x_0)$.

Chứng minh. Lấy $x_n := x_0 \xrightarrow{dom\varphi, Q} x_0$, $x_n^* := 0 \xrightarrow{w^*} 0$ và lấy bất kì $\varepsilon_n \to 0, \delta_n \to 0^+$ thì với mỗi $\varepsilon > 0$ chọn $r_n = r_0 > 0$ bất kì ta có

$$\left\langle x_n^*, x - x_n\right\rangle - (r - \varphi(x_n)) = -(r - \varphi(x_0))$$
$$\leq -(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \leq (\varepsilon_n + \varepsilon)\left(\|x - x_n\| + |r - \varphi(x_n)|\right)$$

với mọi $x \in D_Q(x_n, r_n, \delta_n) \cap dom\varphi, r \geq \varphi(x)$. Do đó $0 \in \partial_Q \varphi(x_0)$. □

Sau đây, chúng tôi đưa ra điều kiện cần cho cực tiểu địa phương của bài toán (P). Trước tiên, chúng ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.11. *Nếu* x_0 *là cực tiểu địa phương của* f *thì* x_0 *là cực tiểu địa phương theo mọi hướng* $u \in X \setminus \{0\}$ *của* f.

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ Định nghĩa 2.8 và Định nghĩa 2.9. □

Định lí 2.12. *Nếu* x_0 *là cực tiểu địa phương của* f *thì với mọi* $u \in X \setminus \{0\}$ *ta có* $0 \in \partial_u f(x_0)$.

Chứng minh. Suy ra từ Định lí 2.10 và Bổ đề 2.11. □

Tài liệu tham khảo

[1]. N. L. H. Anh and P. Q. Khanh (2013), "Higher-order optimality conditions in set-valued optimization using radial sets and radial derivatives", *J. Glob. Optim.*, (56), p. 519-536.

[2]. I. Ginchev and B. S. Mordukhovich (2011), "On directionally dependent subdifferentials", *C. R. Acad. Bulgare Sci.,* (64), p. 497-508.

[3]. I. Ginchev and B. S. Mordukhovich (2012), "Directional subdifferentials and optimality conditions", *Positivity*, (16), p. 707-737.

[4]. P. Q. Khanh and L. T. Tung (2013), "First and second-order optimality conditions using approximations for vector equilibrium problems with constraints", *J. Glob. Optim.*, (55), p. 901-920.

[5]. B. S. Mordukhovich (2006), *Variational Analysis and Generalized Differentiation I*, Springer, Berlin.

[6]. J. P. Penot (2014), "Directionally limiting subdifferentials and second-order optimality conditions", *Optim. Lett.*, (8), p. 1191-1200.

THE DIRECTIONALLY NORMAL CONE AND OPTIMAL CONDITION

Summary

This paper is devoted to study some properties of the directionally Fŕchet normal cones and the directionally limiting normal cones. Moreover, we also modify those directionally limiting normal cones and establish some properties of the modified normal cones. Then we provide some examples to illustrate the differences between these normal cones. Finally, we generate the concepts of the directionally sub-differential via the directionally normal cones. By using the directionally sub-differentials, we come up with a necessary condition for the directionally optimal solution of an optimization problem.

Keywords: Directionally normal cone, directionally sub-differential, optimality condition.