ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA ÁNH XẠ (ψ,ϕ)- CO YẾU PHI TUYẾN TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

• Đoàn Thị Kiều Ngân(*), ThS. Nguyễn Trung Hiếu(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động chung của ánh xạ (ψ,ϕ)-co yếu phi tuyến trong không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự. Các kết quả này là sự mở rộng các kết quả chính của bài báo [4]. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động chung, ánh xạ (ψ,ϕ)-co yếu phi tuyến, không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

1. Giới thiệu

Các định lí điểm bất động là công cụ hữu ích trong việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của nhiều bài toán liên quan đến phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình đạo hàm riêng,... Trong các định lí điểm bất động, Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ là cơ bản nhất. Vì vậy, việc nghiên cứu những mở rộng của nguyên lí này cho những lớp không gian khác nhau cũng như cho những lớp ánh xạ khác nhau được nhiều tác giả quan tâm.

Trong hướng nghiên cứu mở rộng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho những lớp không gian khác nhau, nhiều không gian mêtric suy rộng đã được giới thiệu [1]. Năm 2010, Khamsi [8] đã giới thiệu một không gian mêtric suy rộng là không gian kiểu-mêtric. Gần đây, việc nghiên cứu thiết lập định lí điểm bất động trên không gian kiểu-mêtric được nhiều tác giả quan tâm và đạt được một số kết quả [5], [6], [7].

Trong hướng nghiên cứu mở rộng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho những lớp ánh xạ khác nhau, nhiều lớp ánh xạ co suy rộng đã được giới thiệu [2]. Năm 2001, Rhoades [9] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ co yếu. Khái niệm này đã được Zhang và cộng sự [10] tổng quát thành khái niệm φ-co yếu cho hai ánh xạ và thiết lập định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ này. Sau đó, Dorić [3] đã mở rộng kết quả chính của Zhang và cộng sự bằng việc sử dụng cặp hàm (ψ,φ).

Bên cạnh việc thiết lập những kết quả về điểm bất động trong không gian mêtric và không gian mêtric suy rộng, một số tác giả đã khảo sát điểm bất động và điểm bất động chung trên không gian mêtric sắp thứ tự cũng như trên không gian mêtric suy rộng sắp thứ tự. Một trong những kết quả quan trọng về điểm bất động trong không gian mêtric sắp thứ tự là bài báo của Ran và Reurings (2004), Nieto và Rodriguez-López (2005). Năm 2012, Gordji và các cộng sự [4] đã thiết lập định lí điểm bất động chung cho một lớp ánh xạ (ψ,ϕ)- co yếu phi tuyến trong không gian mêtric sắp thứ tự. Các kết quả này là sự mở rộng các kết quả chính của [3].

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả chính trong bài báo [4] sang không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1 ([8]). Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ và ánh xạ $D : X \times X \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, y_1, \dots, y_n, z \in X$.

(1) $D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

(2) $D(x,y) = D(y,x)$.

(3) $D(x,z) \leq K[D(x,y_1) + D(y_1,y_2) + \dots + D(y_n,z)]$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và bộ (X,D,K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*. Khi $(X,\preceq)$ là tập sắp thứ tự thì bộ $(X,D,K,\preceq)$ được gọi là một *không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự*.

(*) Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

(**) Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Định nghĩa 1.2 ([8]). Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, kí hiệu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n,x) = 0$. Điểm x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} D(x_n,x_m) = 0$.

(3) Không gian (X,D,K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X,D,K) là một dãy hội tụ.

Mệnh đề 1.3 ([7]). *Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric. Khi đó, nếu dãy $\{x_n\}$ trong (X,D,K) hội tụ thì điểm giới hạn của nó là duy nhất.*

Định nghĩa 1.4 ([4]). Cho $(X,\preceq)$ là một tập sắp thứ tự và hai ánh xạ $f,g : X \to X$. Khi đó, cặp (f,g) được gọi là *tăng yếu* nếu $fx \preceq gfx$ và $gx \preceq fgx$ với mọi $x \in X$. Khi $g = id_X$, cặp (f, id_X) được gọi là *tăng yếu* nếu $x \preceq fx$ với mọi $x \in X$.

Các kí hiệu sau được trình bày trong [4].

(1) Ψ là tập hợp các hàm số liên tục, không giảm $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn $\limsup_{r\to 0^+} \frac{r}{\psi(r)} < \infty$ và $\psi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

(2) Φ là tập hợp các hàm số nửa liên tục dưới $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn $\phi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$ và với bất kỳ dãy $\{t_n\}$ mà $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ thì tồn tại $k \in (0,1)$ và tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\phi(t_n) \ge kt_n$ với mọi $n \ge n_0$.

(3) Ω là tập hợp các hàm số liên tục $\theta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn $\theta(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

Ví dụ sau là một minh họa cho lớp hàm Φ.

Ví dụ 1.5. Xét hàm số $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ xác định bởi $\phi(t) = \frac{t}{3}$ với mọi $t \in [0,\infty)$. Khi đó, với bất kỳ dãy $\{t_n\}$ mà $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t_n)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t_n) - \phi(0)}{t_n} = \phi'(0) = \frac{1}{3}$. Do đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\left|\frac{\phi(t_n)}{t_n} - \frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{6}$ với mọi $n \ge n_0$. Suy ra $\phi(t_n) \ge \frac{1}{6} t_n$ với mọi $n \ge n_0$.

Mặt khác, $\phi(t) = \frac{1}{3}$ là hàm số liên tục trên $[0,\infty)$ nên $\phi(t)$ là hàm số nửa liên tục dưới trên $[0,\infty)$. Hơn nữa, $\phi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$. Do đó, ϕ là hàm số thuộc lớp Φ.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi chứng minh kết quả về sự hội tụ trong không gian kiểu-mêtric như sau.

Bổ đề 2.1. *Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric và hai dãy $\{x_n\},\{y_n\}$ trong X thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$. Khi đó*

(1) $\frac{1}{K} D(x,y) \le \liminf_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le \limsup_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le KD(x,y)$.

(2) $\frac{1}{K} D(x,a) \le \liminf_{n\to\infty} D(x_n,a) \le \limsup_{n\to\infty} D(x_n,a) \le KD(x,a)$

với mọi $a \in X$.

Chứng minh. (1). Ta có

$$D(x_n,y_n) \le K(D(x_n,x) + D(x,y) + D(y,y_n)).$$

Suy ra

$$\liminf_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le \limsup_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le KD(x,y).$$

Mặt khác, $D(x,y) \le K(D(x,x_n) + D(x_n,y_n) + D(y_n,y))$.

Suy ra $\frac{1}{K} D(x,y) \le \liminf_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le \limsup_{n\to\infty} D(x_n,y_n)$.

Vậy $\frac{1}{K} D(x,y) \le \liminf_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le \limsup_{n\to\infty} D(x_n,y_n) \le KD(x,y)$.

(2). Lập luận tương tự như trong chứng minh (1). □

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ (ψ,ϕ)-co yếu phi tuyến liên kết với ánh xạ cho trước trong không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

Định nghĩa 2.2. Cho $(X,D,K,\preceq)$ là một không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự và hai ánh xạ $f,g : X \to X$. Khi đó, f được gọi là ánh xạ *(ψ,ϕ)-co yếu phi tuyến liên kết với g* nếu tồn tại hàm $\psi \in \Psi$, $\phi \in \Phi$ và $\theta \in \Omega$ sao cho

$$\psi(KD(fx,gy)) \le \psi(M(x,y)) - \phi(\psi M(x,y))) + \theta(N(x,y)) \quad (2.1)$$

với mọi $x,y \in X$ mà x,y so sánh được với nhau, trong đó

$$M(x,y) = \max\left\{D(x,y), D(x,fx), D(y,gy), \frac{D(x,gy) + D(y,fx)}{2K}\right\},$$

$$N(x,y) = \min\{D(y,fx), D(x,gy)\}.$$

Bổ đề sau thiết lập mối liên hệ giữa điểm bất động chung cho ánh xạ f liên kết với ánh xạ g và điểm bất động của hai ánh xạ này.

Bổ đề 2.3. *Cho $(X, D, K, \preceq)$ là một không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự và f là một ánh xạ (ψ, ϕ)-co yếu phi tuyến liên kết với g. Khi đó, nếu z là điểm bất động của f hoặc g thì z là điểm bất động chung của f và g.*

Chứng minh. Giả sử z là điểm bất động của f. Từ điều kiện (2.1), ta được

$$\psi(D(z,gz)) \le \psi(KD(fz,gz))$$
$$\le \psi(M(z,z)) - \phi(\psi(M(z,z))) + \theta(N(z,z)),$$

trong đó

$$M(z,z) = \max\left\{D(z,z), D(z,fz), D(z,gz), \frac{D(z,gz)+D(z,fz)}{2K}\right\}$$
$$= D(z,gz),$$
$$N(z,z) = \min\{D(z,fz), D(z,gz)\} = 0.$$

Do đó, $\psi(D(z,gz)) \le \psi(D(z,gz)) - \phi(\psi(D(z,gz)))$. Điều này dẫn đến $\phi(\psi(D(z,gz))) = 0$. Theo tính chất của ψ và ϕ, ta suy ra $D(z,gz) = 0$ hay $z = gz$. Do đó, z là điểm bất động của g. Suy ra z là điểm bất động chung của f và g.

Tương tự, nếu z là điểm bất động của g thì z là điểm bất động chung của f và g. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập và chứng minh kết quả chính của bài báo.

Định lí 2.4. *Cho $(X, D, K, \preceq)$ là một không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và hai ánh xạ $f, g : X \to X$ thỏa mãn*

(1) Cặp ánh xạ (f, g) tăng yếu.

(2) f là ánh xạ (ψ, ϕ)-co yếu phi tuyến liên kết với g.

(3) f hoặc g liên tục, hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy không giảm hội tụ đến x thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \ge 0$.

(4) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq fx_0$.

Khi đó, f và g có điểm bất động chung.

Chứng minh. Với $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq fx_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_{2n+1} = fx_{2n}$ và $x_{2n+2} = gx_{2n+1}$ với $n \ge 0$.

Do cặp (f, g) tăng yếu nên $x_0 \preceq x_1 = fx_0 \preceq gfx_0 = gx_1 = x_2 \preceq fgx_1 = fx_2 = x_3$. Tiếp tục quá trình này, ta được $x_n \preceq x_{n+1}$ với mọi $n \ge 0$.

Nếu tồn tại $n \ge 0$ sao cho $x_{2n} = x_{2n+1}$ thì $x_{2n} = fx_{2n}$ hay x_{2n} là điểm bất động của f. Theo Bổ đề 2.3, ta có x_{2n} là điểm bất động chung của f và g. Nếu tồn tại $n \ge 0$ sao cho $x_{2n+1} = x_{2n+2}$ thì $x_{2n+1} = gx_{2n+1}$ hay x_{2n+1} là điểm bất động của g. Theo Bổ đề 2.3, ta có x_{2n+1} cũng là điểm bất động chung của f và g.

Bây giờ ta giả sử $x_n \ne x_{n+1}$ với mọi $n \ge 0$, nghĩa là $D(x_n, x_{n+1}) > 0$ với mọi $n \ge 0$. Từ (2.1), ta có

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})) = \psi(D(fx_{2n}, gx_{2n+1}))$$
$$\le \psi(KD(fx_{2n}, gx_{2n+1}))$$
$$\le \psi(M(x_{2n}, x_{2n+1})) - \phi(\psi(M(x_{2n}, x_{2n+1}))) + \theta(N(x_{2n}, x_{2n+1})).$$

Ta lại có

$$\max\left\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right\} \le M(x_{2n}, x_{2n+1})$$
$$= \max\left\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n}, fx_{2n}), D(x_{2n+1}, gx_{2n+1}), \frac{D(x_{2n}, gx_{2n+1}) + D(x_{2n+1}, fx_{2n})}{2K}\right\}$$
$$= \max\left\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{D(x_{2n}, x_{2n+2}) + D(x_{2n+1}, x_{2n+1})}{2K}\right\}$$
$$= \max\left\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{D(x_{2n}, x_{2n+2})}{2K}\right\}$$
$$\le \max\left\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{D(x_{2n}, x_{2n+1}) + D(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{2}\right\}$$
$$= \max\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\}$$

hay $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\}$ và

$$N(x_{2n}, x_{2n+1}) = \min\{D(x_{2n+1}, fx_{2n}), D(x_{2n}, gx_{2n+1})\}$$
$$= \min\{D(x_{2n+1}, x_{2n+1}), D(x_{2n}, x_{2n+2})\} = 0.$$

Do đó

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \le \psi(\max\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\})$$
$$-\phi(\psi(\max\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\})). \quad (2.2)$$

Giả sử tồn tại $n \geq 0$ sao cho $\max\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\} = D(x_{2n+1}, x_{2n+2})$. Khi đó, vì $D(x_n, x_{n+1}) > 0$ nên (2.2) trở thành

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \leq \psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})) - \phi(\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2}))) < \psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})).$$

Điều này là vô lí. Do đó, với mọi $n \geq 0$, ta có $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max\{D(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n+1}, x_{2n+2})\} = D(x_{2n}, x_{2n+1})$.

Khi đó (2.2) trở thành

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \leq \psi(D(x_{2n}, x_{2n+1})) - \phi(\psi(D(x_{2n}, x_{2n+1}))) < \psi(D(x_{2n}, x_{2n+1})). \quad (2.3)$$

Tương tự, bằng cách chọn $x = x_{2n}$, $y = x_{2n-1}$ trong (2.1), ta cũng chứng minh được

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n})) \leq \psi(D(x_{2n}, x_{2n-1})) - \phi(\psi(D(x_{2n}, x_{2n-1}))) < \psi(D(x_{2n}, x_{2n-1})) \quad (2.4)$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, từ (2.3) và (2.4), ta có $\psi(D(x_{n+1}, x_n)) < \psi(D(x_n, x_{n-1}))$ với mọi $n \geq 1$. Mặt khác, ψ là hàm không giảm nên ta có $D(x_{n+1}, x_n) < D(x_n, x_{n-1})$ hay $\{D(x_n, x_{n+1})\}$ là một dãy số thực giảm và bị chặn bởi 0. Suy ra tồn tại $r \geq 0$ để $\lim_{n\to\infty} D(x_n, x_{n+1}) = r$. Cho $n \to \infty$ trong (2.3) và sử dụng tính chất của ψ, ϕ, ta có $\psi(r) \leq \psi(r) - \liminf_{n\to\infty} \phi(\psi(D(x_{2n}, x_{2n+1}))) \leq \psi(r) - \phi(\psi(r))$.

Điều này dẫn đến $\phi(\psi(r)) = 0$. Suy ra $\psi(r) = 0$. Do đó $r = 0$ hay

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, x_{n+1}) = 0. \quad (2.5)$$

Như vậy, $\lim_{n\to\infty} \psi(D(x_{2n}, x_{2n+1})) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \psi(D(x_{2n+2}, x_{2n+1})) = 0$. Theo tính chất của hàm ϕ, tồn tại $k \in (0,1)$ và tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$\phi(\psi(D(x_{2n}, x_{2n+1}))) \geq k(\psi(D(x_{2n}, x_{2n+1})))$$ và

$$\phi(\psi(D(x_{2n+2}, x_{2n+1}))) \geq k(\psi(D(x_{2n+2}, x_{2n+1}))).$$

Khi đó, với $n \geq n_0$ từ (2.3) và (2.4), ta có

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \leq \psi(D(x_{2n}, x_{2n+1})) - \phi(\psi(D(x_{2n}, x_{2n+1}))) \leq (1-k)\psi(D(x_{2n}, x_{2n+1})),$$

$$\psi(D(x_{2n+1}, x_{2n})) \leq \psi(D(x_{2n}, x_{2n-1})) - \phi(\psi(D(x_{2n}, x_{2n-1}))) \leq (1-k)\psi(D(x_{2n}, x_{2n-1})).$$

Do đó, với mọi $n \geq n_0$, ta có $\psi(D(x_n, x_{n+1})) \leq (1-k)\psi(D(x_{n-1}, x_n))$. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(D(x_n, x_{n+1})) = \sum_{n=1}^{n_0} \psi(D(x_n, x_{n+1})) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \psi(D(x_n, x_{n+1}))$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} \psi(D(x_n, x_{n+1})) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (1-k)\psi(D(x_{n-1}, x_n))$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} \psi(D(x_n, x_{n+1})) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (1-k)^2\psi(D(x_{n-2}, x_{n-1}))$$
$$\ldots$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} \psi(D(x_n, x_{n+1})) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (1-k)^{n-n_0}\psi(D(x_{n_0}, x_{n_0+1})) < \infty.$$

Mặt khác, theo tính chất của hàm ψ, ta có $\limsup_{n\to\infty} \frac{D(x_n, x_{n+1})}{\psi(D(x_n, x_{n+1}))} = \limsup_{r\to 0^+} \frac{r}{\psi(r)} < \infty$. Do đó, ta có $\sum_{n=1}^{\infty} D(x_n, x_{n+1}) < \infty$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$, mọi $p \geq 1$, ta có

$$D(x_n, x_{n+1}) + D(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + D(x_{n+p-1}, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Do đó, với mọi $n \geq n_0$, mọi $p \geq 1$, ta có

$$D(x_n, x_{n+p}) \leq K(D(x_n, x_{n+1}) + D(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + D(x_{n+p-1}, x_{n+p})) < \varepsilon.$$

Điều này dẫn đến $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong X. Vì (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ nên tồn tại $z \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.

Giả sử g liên tục. Khi đó $z = \lim_{n\to\infty} x_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} gx_{2n+1} = g(\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}) = gz$ hay z là điểm bất động của g. Theo Bổ đề 2.3, ta có z là điểm bất động chung của f và g. Tương tự, nếu f liên tục thì ta cũng chứng minh được z là điểm bất động chung của f và g.

Giả sử giả thiết (H) được thỏa mãn. Khi đó, $x_n \preceq z$ với mọi $n \geq 0$. Giả sử $D(z, gz) > 0$. Từ (2.1), ta có

$$\psi(KD(x_{2n+1}, gz)) = \psi(KD(fx_{2n}, gz)) \leq \psi(M(x_{2n}, z)) - \phi(\psi(M(x_{2n}, z))) + \phi(N(x_{2n}, z)), \quad (2.6)$$

trong đó

$$M(x_{2n},z)=\max\Big\{D(x_{2n},z),D(x_{2n},fx_{2n}),D(z,gz),\frac{D(x_{2n},gz)+D(z,fx_{2n})}{2K}\Big\}$$
$$=\max\Big\{D(x_{2n},z),D(x_{2n},x_{2n+1}),D(z,gz),\frac{D(x_{2n},gz)+D(z,x_{2n+1})}{2K}\Big\} \quad (2.7)$$
$$N(x_{2n},z)=\min\{D(x_{2n},gz),D(z,fx_{2n})\}=\min\{D(x_{2n},gz),D(z,x_{2n+1})\}. \quad (2.8)$$

Cho $n\to\infty$ trong (2.7), (2.8) và sử dụng Bổ đề 2.1, ta được

$$\frac{1}{2K^2}D(z,gz)=\min\left\{D(z,gz),\frac{D(z,gz)}{2K^2}\right\}\le\liminf_{n\to\infty}M(x_{2n},z)$$
$$\le\limsup_{n\to\infty}M(x_{2n},z)\le\max\left\{D(z,gz),\frac{D(z,gz)}{2}\right\}=D(z,gz)$$

và $\lim_{n\to\infty}N(x_{2n},z)=0$. Khi đó, cho $n\to\infty$ trong (2.6) và sử dụng Bổ đề 2.1, ta được

$$\psi(D(z,gz))\le\psi(\limsup_{n\to\infty}KD(x_{2n+1},gz))$$
$$\le\limsup_{n\to\infty}\psi(M(x_{2n},z))-\liminf_{n\to\infty}\phi(\psi(M(x_{2n},z)))$$
$$<\psi(D(z,gz)).$$

Điều này là vô lí. Do đó $D(z,gz)=0$ hay $z=gz$. Suy ra z là điểm bất động của g. Theo Bổ đề 2.3, ta có z là điểm bất động chung của f và g. □

Bằng cách chọn $f=g$ trong Định lí 2.4, ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.5. *Cho $(X,D,K,\preceq)$ là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự và ánh xạ $f:X\to X$ thỏa mãn*

(1) Cặp ánh xạ (f,id_X) tăng yếu.

(2) Tồn tại hàm $\psi\in\Psi$, $\phi\in\Phi$ sao cho

$$\psi(KD(fx,fy))\le\psi(\mathrm{M}(x,y))-\phi(\psi(\mathrm{M}(x,y))) \quad (2.9)$$

với mọi $x,y\in X$ và x,y so sánh được với nhau, trong đó

$$\mathrm{M}(x,y)=\max\left\{D(x,y),D(x,fx),D(y,fy),\frac{D(x,fy)+D(y,fx)}{2K}\right\}.$$

(3) f liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy không giảm hội tụ đến x thì $x_n\preceq x$ với mọi $n\ge 0$.

Khi đó, f có điểm bất động.

Nhận xét 2.6. Do mỗi mêtric là một kiểu-mêtric với $K=1$ nên [4, Theorem 2.1] và [4, Theorem 2.2] lần lượt là trường hợp đặc biệt của Định lí 2.4 và Hệ quả 2.5.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự tồn tại điểm bất động chung trong Định lí 2.4.

Ví dụ 2.7. Xét $X=\{0,1,2\}$ với thứ tự $\preceq$ xác định bởi: $x\preceq y$ nếu $x\ge y$ trên $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ $D:X\times X\to[0,\infty)$ xác định bởi:

$D(0,0)=D(1,1)=\mathrm{D}(2,2)=0,$

$D(1,2)=D(2,1)=4,$

$D(0,1)=D(1,0)=\mathrm{D}(0,2)=\mathrm{D}(2,0)=1.$

Khi đó, (X,D) là một không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự đầy đủ với $K=2$. Xét hai ánh xạ $f,g:X\to X$ xác định bởi:

$f0=f1=f2=0$ và $g0=0,g1=2,g2=1.$

Ta có

$f0=gf0=f1=gf1=f2=gf2=0$ và $fg0=fg1=fg2=0$. Suy ra $fx\preceq gfx$ và $gx\preceq fgx$ với mọi $x\in X$. Do đó, (f,g) là cặp ánh xạ tăng yếu. Xét hàm $\psi\in\Psi,\phi\in\Phi$ và $\theta\in\Omega$ xác định bởi $\psi(t)=\frac{1}{2}t$, $\phi(t)=\frac{1}{3}t$ và $\theta(t)=t$ với $t\ge 0$. Khi đó, (2.1) trở thành

$$D(fx,gy)\le\frac{1}{3}M(x,y)+N(x,y). \quad (2.10)$$

Với mọi $x,y\in X$ mà x,y so sánh được, ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x\in\{0,1,2\}$ và $y=0$. Khi đó, $D(fx,gy)=D(0,0)=0$. Suy ra (2.10) được thỏa mãn.

Trường hợp 2. $x\in\{0,1,2\}$ và $y\in\{1,2\}$. Khi đó, $D(fx,gy)=D(0,1)=D(0,2)=1$. Ta lại có $D(1,g1)=D(2,g2)=D(1,2)=4$. Suy ra $M(x,y)=4$. Do đó, (2.10) được thỏa mãn.

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra điều kiện (2.1) được thỏa mãn và do đó f là một ánh xạ (ψ,ϕ)-co yếu phi tuyến liên kết với g. Hơn nữa, các giả thiết khác của Định lí 2.4 cũng thỏa mãn. Vì vậy, Định lí 2.4 áp dụng được cho các ánh xạ f,g,ψ,ϕ,θ và không gian kiểu-mêtric $(X,D,K,\preceq)$.

Tuy nhiên, vì $4=D(1,2)>D(1,0)+D(0,2)=2$ nên D không phải là một mêtric trên X. Do đó, [4, Định lí 2.1] không áp dụng được cho ánh xạ D đã cho.

Tài liệu tham khảo

[1]. T. V. An, N. V. Dung, Z. Kadelburg, and S. Radenovic (2014), "Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems", *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, (109), p. 175-198.

[2]. P. Collaco and J. C. E. Silva (1997), "A complete comparison of 25 contraction conditions", *Nonlinear Anal.*, 30(1), p. 471-476.

[3]. D. Dorić (2009), "Common fixed point for generalized (ψ,φ)-weak contractions", *Appl. Math. Lett.*, (22), p. 1896-1900.

[4]. D. E. Gordji, H. Baghani, and G. H. Kim (2012), "Common fixed point theorems for (ψ,ϕ)-weak nonlinear contraction in partially ordered sets", *Fixed Point Theory Appl.,* (2012:62), p. 1-12.

[5]. Nguyễn Trung Hiếu và Hồ Quốc Ái (2014), "Về định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ Meir Keeler α-co trên không gian kiểu-mêtric", *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, (số 9), tr. 101-111.

[6]. N. T. Hieu and V. T. L. Hang (2013), "Coupled fixed point theorems for generalized α-ψ-contractive mappings in partially ordered metric-type spaces", *J. Nonlinear Anal. Optim.,* 19 pages, submitted.

[7]. Nguyễn Trung Hiếu và Hoàng Hiền Hưởng (2014), "Về định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trong không gian kiểu-mêtric", *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, (số 8), tr. 33-42.

[8]. M. A. Khamsi (2010), "Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *Fixed Point Theory Appl.*, (2010), p. 1-7.

[9]. B. E. Rhoades (2001), "Some theorems on weakly contractive maps", *Nonlinear Anal.,* (47), p. 2683-2693.

[10]. Q. Zhang and Y. Song (2009), "Fixed point theory for generalized φ-weak contractions", *Appl. Math. Lett.*, (22), p. 75-78.

SOME COMMON FIXED POINT THEOREMS FOR (ψ,ϕ) -WEAK NONLINEAR CONTRACTION IN PARTIALLY ORDERED METRIC-TYPE SPACES

Summary

This paper aims to present results obtained from constructing and proving some common fixed point theorems for (ψ,ϕ)-weak nonlinear contraction in partially ordered metric-type spaces. These results are the expansion of the main results in [4].

Keywords: common fixed point, (ψ,ϕ)-weak nonlinear contraction, partially ordered metric-type spaces.