BỘ ĐÔI ĐIỂM TRÙNG KHÔNG GIAO HOÁN TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

• ThS. Huỳnh Ngọc Cảm(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh định lí bộ đôi điểm trùng cho cặp ánh xạ không giao hoán trong không gian b-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: Bộ đôi điểm trùng, không gian b-mêtric, ánh xạ không giao hoán.

1. Giới thiệu

Gần đây, sự tồn tại điểm bất động cho ánh xạ co trong không gian mêtric thứ tự được sự quan tâm của các tác giả R. P. Agarwal và các cộng sự [1], T. G. Bhaskar và V. Lakshmikantham [2], N. V. Luong và N. X. Thuan [10],...

Dùng khái niệm ánh xạ giao hoán và g-đơn điệu hỗn hợp, V. Lakshmikantham và L. Ćirić [9] đã thiết lập và chứng minh định lí bộ đôi điểm trùng, kết quả này được tổng quát từ T. G. Bhaskar và V. Lakshmikantham [2]. Năm 2012, N. Hussain và các cộng sự [7] đã chứng minh kết quả chính của bài báo [9] trong không gian mêtric thứ tự đầy đủ mà không dùng đến điều kiện giao hoán của hai ánh xạ.

Năm 1998, S. Czerwik [5] đã giới thiệu không gian b-mêtric. Đồng thời, tác giả đã trình bày một số tính chất của không gian b-mêtric và thiết lập định lí điểm bất động trên không gian này. Hướng nghiên cứu này được sự quan tâm của các tác giả M. Boriceanu [3], M. Boriceanu và các cộng sự [4],...

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh kết quả đề cập trong [7] cho không gian b-mêtric.

Sau đây là một số định nghĩa và tính chất được dùng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1 ([5]). Cho X là tập khác rỗng, $K \geq 1$ là số thực và $D: X \times X \to [0,\infty)$ là ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y, z \in X$

(1) $D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x,y) = D(y,x)$ với mọi $x, y \in X$;

(3) $D(x,z) \leq K(D(x,y) + D(y,z))$.

Khi đó D được gọi là một *b-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một *không gian b-mêtric*.

Rõ ràng, $(X, D, 1)$ là không gian mêtric.

Định nghĩa 1.2 ([3]). Cho (X, D, K) là không gian b-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x, viết là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ hoặc $x_n \to x$, nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim_{m,n\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X, D, K) là dãy hội tụ.

Nhận xét 1.3 ([8]). Trong không gian b-mêtric (X, D, K) tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ theo dãy trong X. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian b-mêtric (X, D, K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó b-mêtric $D: X \times X \to [0,+\infty)$ liên tục tại (x,y) nếu và chỉ nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x,y)$ với mọi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ trong X mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Định nghĩa 1.4 ([9]). Phần tử $(x,y) \in X \times X$ được gọi là *bộ đôi điểm trùng* của hai ánh xạ $F: X \times X \to X$ và $g: X \to X$ nếu $F(x,y) = gx, F(y,x) = gy$.

Định nghĩa 1.5 ([9]). Cho $(X, \leq)$ là tập sắp thứ tự bộ phận và $F: X \times X \to X$ là ánh xạ.

(*) Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Khi đó F được gọi là *đơn điệu hỗn hợp* nếu F là không giảm đối với biến thứ nhất và không tăng đối với biến thứ hai, nghĩa là, với mỗi $x, y \in X$

$x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ và $y_1 \le y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \ge F(x, y_2)$

với mọi $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$.

Định nghĩa 1.6 ([9]). Cho $(X, \le)$ là tập sắp thứ tự bộ phận, $F : X \times X \to X$ và $g : X \to X$ là hai ánh xạ. Khi đó F được gọi là *g-đơn điệu hỗn hợp* nếu F là g-không giảm đối với biến thứ nhất và g-không tăng đối với biến thứ hai, nghĩa là, với mỗi $x, y \in X$

$$gx_1 \le gx_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y) \text{ và}$$
$$gy_1 \le gy_2 \Rightarrow F(x, y_1) \ge F(x, y_2) \qquad (1.1)$$

với mọi $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$.

Định nghĩa 1.7 ([9]). Cho X là tập khác rỗng, $F : X \times X \to X$ và $g : X \to X$ là hai ánh xạ. Khi đó F và g được gọi là *giao hoán* nếu $g(F(x, y)) = F(gx, gy)$ với mọi $x, y \in X$.

Mệnh đề 1.8 ([6]). *Cho X là tập khác rỗng và $f : X \to X$ là ánh xạ. Khi đó tồn tại tập con $E \subset X$ sao cho $f(E) = f(X)$ và $f : E \to X$ là đơn ánh.*

Gọi Φ là tập hợp tất cả các hàm $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(1) $\varphi(t) < t$ với $t > 0$ và $\varphi(0) = 0$,

(2) $\lim\limits_{r \to t^+} \varphi(r) < t$ với $t > 0$.

1. Kết quả chính

Kết quả sau là sự mở rộng của [9, Theorem 2.1] sang không gian b-mêtric.

Mệnh đề 2.1. *Cho $(X, D, K, \le)$ là không gian b-mêtric thứ tự bộ phận đầy đủ, $F : X \times X \to X$ và $g : X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) F là ánh xạ g-đơn điệu hỗn hợp và $F(X \times X) \subset gX$.

(2) Tồn tại $\varphi \in \Phi$ sao cho

$$D\big(F(x, y), F(u, v)\big) \le \varphi\left(\frac{D(gx, gu) + D(gy, gv)}{2K^4}\right) \qquad (2.1)$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ và $gx \le gu, gy \ge gv$.

(3) g liên tục và giao hoán với F.

(4) F liên tục hoặc X có tính chất sau

(a) Nếu dãy không giảm $x_n \to x$ thì $x_n \le x$ với mọi n;

(b) Nếu có dãy không tăng $y_n \to y$ thì $y_n \ge y$ với mọi n.

(5) Tồn tại $x_0, y_0 \in X$ sao cho $gx_0 \le F(x_0, y_0)$ và $gy_0 \ge F(y_0, x_0)$.

Khi đó F và g có bộ đôi điểm trùng.

Chứng minh. Khi $K = 1$, Mệnh đề 2.1 trở thành [9, Theorem 2.1] nên trong phép chứng minh này, ta chỉ xét trường hợp $K > 1$.

Từ $F(X \times X) \subset gX$, ta chọn $x_1, y_1 \in X$ sao cho $gx_1 = F(x_0, y_0)$ và $gy_1 = F(y_0, x_0)$. Vì $F(X \times X) \subset gX$, ta chọn $x_2, y_2 \in X$ sao cho $gx_2 = F(x_1, y_1)$ và $gy_2 = F(y_1, x_1)$. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, ta xây dựng được dãy $\{gx_n\}$ và dãy $\{gy_n\}$ trong X sao cho

$$gx_{n+1} = F(x_n, y_n) \text{ và } gy_{n+1} = F(y_n, x_n) \text{ với mọi } n \ge 0. \qquad (2.2)$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng tỏ

$$gx_n \le gx_{n+1} \text{ và } gy_n \ge gy_{n+1} \text{ với mọi } n \ge 0. \qquad (2.3)$$

Với $n = 0$, ta có $gx_0 \le F(x_0, y_0) = gx_1$ và $gy_0 \ge F(y_0, x_0) = gy_1$. Vậy (2.3) đúng với $n = 0$.

Giả sử (2.3) đúng với $n > 0$. Khi đó $gx_n \le gx_{n+1}$ và $gy_n \ge gy_{n+1}$. Từ (2.2) và F là g-đơn điệu hỗn hợp, ta có

$$gx_{n+1} = F(x_n, y_n) \le F(x_{n+1}, y_n) \le F(x_{n+1}, y_{n+1}) = gx_{n+2}$$

và

$$gy_{n+1} = F(y_n, x_n) \ge F(y_{n+1}, x_n) \ge F(y_{n+1}, x_{n+1}) = gy_{n+2}.$$

Do đó (2.3) đúng với $n+1$. Vậy (2.3) đúng với mọi $n \ge 0$.

Đặt $\delta_n = D(gx_n, gx_{n+1}) + D(gy_n, gy_{n+1})$. Ta chứng tỏ

$$\delta_n \le 2\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2K^4}\right). \qquad (2.4)$$

Từ $gx_{n-1} \le gx_n$ và $gy_{n-1} \ge gy_n$, kết hợp (2.1) và (2.2) ta có

$$D(gx_n, gx_{n+1}) = D(F(x_{n-1}, y_{n-1}), F(x_n, y_n)) \qquad (2.5)$$
$$\le \varphi\left(\frac{D(gx_{n-1}, gx_n) + D(gy_{n-1}, gy_n)}{2K^4}\right) = \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2K^4}\right)$$

và

$$D(gy_{n+1}, gy_n) = D(F(y_n, x_n), F(y_{n-1}, x_{n-1})) \qquad (2.6)$$

$$\leq \varphi\left(\frac{D(gy_{n-1},gy_n)+D(gx_{n-1},gx_n)}{2K^4}\right)=\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2K^4}\right).$$

Từ (2.5) và (2.6) ta có (2.4).

Từ (2.4) và định nghĩa hàm φ ta suy ra $\delta_n \leq 2\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2K^4}\right)\leq \frac{\delta_{n-1}}{K^4}<\delta_{n-1}$ hay dãy $\{\delta_n\}$ giảm. Do đó tồn tại $\delta \geq 0$ sao cho $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\delta$.

Ta chứng tỏ $\delta=0$. Giả sử ngược lại $\delta>0$, qua giới hạn 2 vế của (2.4) và sử dụng tính chất $\lim_{r\to t^+}\varphi(r)<t$ với mọi $t>0$, ta có

$$\delta=\lim_{\delta_n\to\delta}\delta_n \leq 2\lim_{\delta_{n-1}\to\delta^+}\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2K^4}\right)<2\frac{\delta}{2K^4}=\frac{\delta}{K^4}<\delta.$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy $\delta=0$, nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty}\left(D(gx_n,gx_{n+1})+D(gy_n,gy_{n+1})\right)=\lim_{n\to\infty}\delta_n=0. \quad (2.7)$$

Bây giờ ta chứng minh $\{gx_n\}$ và $\{gy_n\}$ là hai dãy Cauchy trong (X,D,K). Giả sử ngược lại $\{gx_n\}$ hoặc $\{gy_n\}$ không là dãy Cauchy trong (X,D,K). Khi đó tồn tại $\varepsilon>0$ và hai dãy số nguyên $\{l(k)\}$, $\{m(k)\}$ sao cho $m(k)>l(k)\geq k\geq 1$ và

$$r_k=D(gx_{l(k)},gx_{m(k)})+D(gy_{l(k)},gy_{m(k)})\geq\varepsilon. \quad (2.8)$$

Với mỗi $k\geq 1$, chọn $m(k)$ nhỏ nhất thỏa mãn (2.8). Khi đó ta có

$$D(gx_{l(k)},gx_{m(k)-1})+D(gy_{l(k)},gy_{m(k)-1})<\varepsilon. \quad (2.9)$$

Từ (2.8) và (2.9), ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon\leq r_k &\leq K\left(D(gx_{l(k)},gx_{m(k)-1})+D(gx_{m(k)-1},gx_{m(k)})\right)\\ &+K\left(D(gy_{l(k)},gy_{m(k)-1})+D(y_{m(k)-1},gy_{m(k)})\right) \quad (2.10)\\ &=K\left(D(gx_{l(k)},gx_{m(k)-1})+D(gy_{l(k)},gx_{m(k)-1})\right)+K\delta_{m(k)-1}\\ &<K\varepsilon+K\delta_{m(k)-1}.\end{aligned}$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.10) và sử dụng (2.7), ta có

$$\varepsilon\leq\limsup_{k\to\infty}r_k\leq K\varepsilon. \quad (2.11)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}r_k &= D(gx_{l(k)},gx_{m(k)})+D(gy_{l(k)},gy_{m(k)})\\ &=KD(gx_{l(k)},gx_{l(k)+1})+K^2D(gx_{l(k)+1},gx_{m(k)+1})+K^2D(gx_{m(k)+1},gx_{m(k)})\\ &+KD(gy_{l(k)},gy_{l(k)+1})+K^2D(gy_{l(k)+1},gy_{m(k)+1})+K^2D(gy_{m(k)+1},gy_{m(k)})\\ &=K\left[D(gx_{l(k)},gx_{l(k)+1})+D(gy_{l(k)},gy_{l(k)+1})\right]\\ &+K^2\left[D(gx_{m(k)},gx_{m(k)+1})+D(gy_{m(k)},gy_{m(k)+1})\right]\\ &+K^2\left[D(gx_{l(k)+1},gx_{m(k)+1})+D(gy_{l(k)+1},gy_{m(k)+1})\right].\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}r_k &\leq K\delta_{l(k)}+K^2\delta_{m(k)}+K^2(D(gx_{l(k)+1},gx_{m(k)+1})\\ &+D(gy_{l(k)+1},gy_{m(k)+1})) \quad (2.12)\end{aligned}$$

Từ (2.3), ta có $gx_{l(k)}\leq gx_{m(k)}$ và $gy_{l(k)}\geq gy_{m(k)}$, kết hợp với (2.1) và (2.2) ta có

$$\begin{aligned}D(gx_{l(k)+1},gx_{m(k)+1}) &= D\left(F\left(x_{l(k)},y_{l(k)}\right),F\left(x_{m(k)},y_{m(k)}\right)\right) \quad (2.13)\\ &\leq\varphi\left(\frac{D(gx_{l(k)},gx_{m(k)})+D(gy_{l(k)},gy_{m(k)})}{2K^4}\right)=\varphi\left(\frac{r_k}{2K^4}\right).\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}D(gy_{m(k)+1},gy_{l(k)+1}) &= D\left(F\left(y_{m(k)},x_{m(k)}\right),F\left(y_{l(k)},x_{l(k)}\right)\right) \quad (2.14)\\ &\leq\varphi\left(\frac{D(gx_{l(k)},gx_{m(k)})+D(gy_{l(k)},gy_{m(k)})}{2K^4}\right)=\varphi\left(\frac{r_k}{2K^4}\right).\end{aligned}$$

Từ (2.12), (2.13) và (2.14), ta có

$$\begin{aligned}r_k &\leq K\delta_{l(k)}+K^2\delta_{m(k)}+2K^2\varphi\left(\frac{r_k}{2K^4}\right)\\ &<K\delta_{l(k)}+K^2\delta_{m(k)}+\frac{r_k}{K^2}. \quad (2.15)\end{aligned}$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.15) và sử dụng (2.7) và (2.11), ta có

$$\varepsilon\leq\limsup_{k\to\infty}r_k\leq\limsup_{k\to\infty}\frac{r_k}{K^2}\leq\frac{\varepsilon}{K}<\varepsilon.$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó $\{gx_n\}$ và $\{gy_n\}$ là hai dãy Cauchy trong (X,D,K).

Vì (X,D,K) đầy đủ nên tồn tại $x,y\in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty}gx_n=x \text{ và } \lim_{n\to\infty}gy_n=y. \quad (2.16)$$

Từ (2.16) và tính liên tục của g, ta có

$$\lim_{n\to\infty}g(gx_n)=gx \text{ và } \lim_{n\to\infty}g(gy_n)=gy. \quad (2.17)$$

Từ (2.2) và tính giao hoán của F và g, ta có

$$\begin{aligned}g(gx_{n+1}) &= gF\left(x_n,y_n\right)=F\left(gx_n,gy_n\right),\\ g(gy_{n+1}) &= gF\left(y_n,x_n\right)=F\left(gy_n,gx_n\right). \quad (2.18)\end{aligned}$$

Ta chứng tỏ $gx=F(x,y)$ và $gy=F(y,x)$.

Giả sử F liên tục. Khi đó cho $n\to\infty$ trong (2.18) và sử dụng (2.16) và (2.17), ta có

$$\begin{aligned}gx &= \lim_{n\to\infty}g(gx_{n+1})=\lim_{n\to\infty}F\left(gx_n,gy_n\right)\\ &=F\left(\lim_{n\to\infty}gx_n,\lim_{n\to\infty}gy_n\right)=F\left(x,y\right),\\ gy &= \lim_{n\to\infty}g(gy_{n+1})=\lim_{n\to\infty}F\left(gy_n,gx_n\right)\\ &=F\left(\lim_{n\to\infty}gy_n,\lim_{n\to\infty}gx_n\right)=F\left(y,x\right).\end{aligned}$$

Giả sử X có tính chất (a), (b). Do $\{gx_n\}$ là dãy không giảm, $\{gy_n\}$ là dãy không tăng và tính chất giao hoán của F và g nên ta có

$$g(gx_{n+1}) = F(gx_n, gy_n) \le F(gx_{n+1}, gy_n)$$
$$\le F(gx_{n+1}, gy_{n+1}) = g(gx_{n+2}),$$
$$g(gy_{n+1}) = F(gy_n, gx_n) \ge F(gy_{n+1}, gx_n)$$
$$\ge F(gy_{n+1}, gx_{n+1}) = g(gy_{n+2}),$$

Suy ra $\{g(gx_n)\}$ là dãy không giảm, $\{g(gy_n)\}$ là dãy không tăng. Khi đó kết hợp với (2.17) ta suy ra $g(gx_n) \le gx$ và $g(gy_n) \ge gy$. Do đó từ (2.1) và (2.18) ta có

$$D(gx, F(x,y)) \le K\big(D(gx, g(gx_{n+1})) + D(g(gx_{n+1}), F(x,y))\big)$$
$$= K\big(D(gx, g(gx_{n+1})) + D(F(gx_n, gy_n), F(x,y))\big) \quad (2.19)$$
$$\le K\left(D(gx, g(gx_{n+1})) + \varphi\left(\frac{D(g(gx_n), gx) + D(g(gy_n), gy)}{2K^4} \right)\right).$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.19) và sử dụng (2.17) ta có $D(g(x), F(x,y)) = 0$. Do đó $gx = F(x,y)$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $gy = F(y,x)$. Vậy F và g có bộ đôi điểm trùng. □

Trong Mệnh đề 2.1, cho g là ánh xạ đồng nhất, ta có hệ quả sau

Hệ quả 2.2. *Cho $(X, D, K, \le)$ là không gian b-mêtric thứ tự bộ phận đầy đủ và $F: X\times X \to X$ là ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) F có tính chất đơn điệu hỗn hợp.

(2) Tồn tại $\varphi \in \Phi$ sao cho

$$D\big(F(x,y), F(u,v)\big) \le \varphi\left(\frac{D(x,u) + D(y,v)}{2K^4} \right) \quad (2.20)$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ và $x \le u, y \ge v$.

(3) F liên tục hoặc X có tính chất sau

(a) Nếu có dãy không giảm $x_n \to x$ thì $x_n \le x$ với mọi n;

(b) Nếu có dãy không tăng $y_n \to y$ thì $y_n \ge y$ với mọi n.

(4) Tồn tại $x_0, y_0 \in X$ sao cho $x_0 \le F(x_0, y_0)$ và $y_0 \ge F(y_0, x_0)$.

Khi đó F và g có bộ đôi điểm bất động.

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lí bộ đôi điểm trùng cho cặp ánh xạ không giao hoán trong không gian b-mêtric, kết quả này là sự mở rộng của [7, Theorem 2.9] sang không gian b-mêtric.

Định lí 2.3. *Cho $(X, D, K, \le)$ là không gian b-mêtric thứ tự bộ phận, $F: X\times X \to X$ và $g: X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) F là ánh xạ g-đơn điệu hỗn hợp, $F(X\times X) \subset gX$ và gX đầy đủ.

(2) Tồn tại $\varphi \in \Phi$ sao cho

$$D\big(F(x,y), F(u,v)\big) \le \varphi\left(\frac{D(gx, gu) + D(gy, gv)}{2K^4} \right) \quad (2.21)$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ và $gx \le gu, gy \ge gv$.

(3) Nếu $gx_n \to gx$ thì $x_n \to x$.

(4) F liên tục hoặc X có tính chất sau

(a) Nếu có dãy không giảm $x_n \to x$ thì $x_n \le x$ với mọi n;

(b) Nếu có dãy không tăng $y_n \to y$ thì $y_n \ge y$ với mọi n.

(5) Tồn tại $x_0, y_0 \in X$ sao cho $gx_0 \le F(x_0, y_0)$ và $gy_0 \ge F(y_0, x_0)$.

Khi đó F và g có bộ đôi điểm trùng.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.8, tồn tại $E \subset X$ sao cho $gE = gX$ và $g: E \to X$ là đơn ánh. Ta xây dựng ánh xạ $G: gX \times gX \to X$ xác định như sau

$$G(gx, gy) = F(x,y) \text{ với mọi } gx, gy \in gX. \quad (2.22)$$

Vì g là đơn ánh trên E nên ánh xạ G được xác định. Từ (2.21) và (2.22), suy ra

$$D(G(gx, gy), G(gu, gv)) = D(F(x,y), F(u,v))$$
$$\le \varphi\left(\frac{D(gx, gu) + D(gu, gv)}{2K^4} \right)$$

với mọi $gx, gy, gu, gv \in gX$, $gx \le gu$ và $gy \ge gv$. Do đó G thỏa mãn điều kiện (2.20).

Do F là hàm g-đơn điệu hỗn hợp nên với mọi $gx, gy \in gX$, ta có

$gx_1, gx_2 \in gX, gx_1 \le gx_2$ suy ra $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ hay $G(gx_1, gy) \le G(gx_2, gy)$

và

$gy_1, gy_2 \in gX, gy_1 \le gy_2$ suy ra $F(x, y_1) \ge F(x, y_2)$ hay $G(gx, gy_1) \ge G(gx, gy_2)$.

Do đó G có tính chất đơn điệu hỗn hợp.

Giả sử tồn tại $x_0, y_0 \in X$ sao cho $gx_0 \le F(x_0, y_0)$ và $gy_0 \ge F(y_0, x_0)$. Khi đó ta có $gx_0 \le G(gx_0, gy_0)$ và $gy_0 \ge G(gy_0, gx_0)$.

Giả sử F liên tục. Ta chứng tỏ rằng G liên tục. Với mỗi $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ sao cho $(gx_n, gy_n) \to (gx, gy)$. Ta cần chứng tỏ $G(gx_n, gy_n) \to G(gx, gy)$. Thật vậy, từ $(gx_n, gy_n) \to (gx, gy)$, theo Giả thiết (3), ta có $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Vì F liên tục nên $F(x_n, y_n) \to F(x, y)$. Do đó $G(gx_n, gy_n) \to F(gx, gy)$. Vậy G liên tục.

Giả sử X có tính chất *(a)*, *(b)*. Vì $gX \subseteq X$ nên gX có tính chất *(a)*, *(b)*.

Như vậy các giả thiết của Hệ quả 2.2 được thỏa mãn. Do đó G có bộ đôi điểm bất động.

Cuối cùng, ta chứng minh F và g có bộ đôi điểm trùng. Giả sử $(u, v) \in gX \times gX$ là bộ đôi điểm bất động của G, ta có

$$u = G(u, v) \text{ và } v = G(v, u). \qquad (2.23)$$

Từ $(u, v) \in gX \times gX$, tồn tại một điểm $(u_0, v_0) \in X \times X$ sao cho

$$u = gu_0 \text{ và } v = gv_0. \qquad (2.24)$$

Từ (2.23) và (2.24) suy ra

$$gu_0 = G(gu_0, gv_0) \text{ và } gv_0 = G(gv_0, gu_0). \quad (2.25)$$

Kết hợp (2.22) và (2.25) ta có $gu_0 = F(u_0, v_0)$ và $gv_0 = F(v_0, u_0)$. Do đó (u_0, v_0) là bộ đôi điểm trùng của F và g. □

Định lí 2.4. *Cho $(X, D, K, \le)$ là không gian b-mêtric thứ tự bộ phận, $F : X \times X \to X$ và $g : X \to X$ là hai ánh xạ sao cho các giả thiết của Định lí 2.3 thỏa mãn trừ điều kiện đầy đủ của $g(X)$. Khi đó, nếu X đầy đủ và g là toàn ánh thì F và g có một bộ đôi điểm trùng.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.8, tồn tại $E \subseteq X$ sao cho $g(E) = g(X)$. Vì g là toàn ánh nên $X = g(X)$. Vậy theo Định lí 2.3 ta có điều phải chứng minh. □

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ minh họa cho Định lí 2.4.

Ví dụ 2.5. Cho $X = \mathbb{R}$ với thứ tự thông thường và ánh xạ $D : X \times X \to X$ xác định bởi $D(x, y) = (x - y)^2$ với mọi $(x, y) \in X \times X$. Khi đó với mọi $x, y, z \in X$, ta có

(1) $D(x, y) \ge 0$, $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x, y) = D(y, x)$;

(3) $D(x, y) = (x - y)^2 = (x - y + y - z)^2$

$$\le 2[(x - y)^2 + (y - z)^2] = 2[D(x, y) + D(y, z)].$$

Vậy $(X, D, \le)$ là không gian b-mêtric thứ tự với $K = 2$.

Xét ánh xạ $F : X \times X \to X$ và $g : X \to X$ xác định bởi $F(x, y) = 1$ với mọi $(x, y) \in X \times X$ và $g(x) = x - 1$ với mọi $x \in X$. Khi đó $g(F(x, y)) = g(1) = 0 \ne 1 = F(gx, gy)$ với mọi $x, y \in X$. Do đó F và g không thỏa mãn tính chất giao hoán. Khi đó Mệnh đề 2.1 không thể áp dụng cho hai ánh xạ này.

Rõ ràng ta có $F(X \times X) \subset gX$, g là toàn ánh, $gX = X$ là đầy đủ, F là g-đơn điệu.

Chọn $x_0 = 1$ và $y_0 = 3$ với $g(1) = 0 < 1 = F(1, 3)$ và $g(3) = 2 > 1 = F(1, 3)$.

Giả sử $gx_n \to gx$ ta có $x_n - 1 \to x - 1$. Suy ra $x_n \to x$. Hơn nữa, (2.21) thỏa mãn. Do đó, các điều kiện của Định lí 2.4 được thỏa mãn. Khi đó, F và g có bộ đôi điểm trùng trong $X \times X$. Cụ thể, bộ đôi điểm trùng của F và g là (2,2).

Tài liệu tham khảo

[1]. R. P. Agarwal, El-Gebeily and M. A., O'Regan (2008), "Generalized contractions in partially ordered metric spaces", *Appl Anal.*, (87), p. 1-8.

[2]. T. G. Bhaskar and V. Lakshmikantham (2006), "Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications", *Nonlinear Anal.*, (65), p. 1379-1393.

[3]. M. Boriceanu (2009), "Strict fixed point theorems for multivalued operators in b-metric spaces", *Int. J. Modern Math.*, (4), p. 285-301.

[4]. M. Boriceanu, A. Petrusel and I. A. Rus (2010), "Fixed point theorems for some multivalued generalized contractions in b-metric spaces", *Int. J. Math. Stat.*, 6(10), p. 65-76.

[5]. S. Czerwik (1998), "Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46(2), p. 263-276.

[6]. R. H. Haghia, Sh. Rezapoura and N. Shahzadb (2011), "Some fixed point generalizations are not real generalizations", *Nonlinear Anal.*, (74), p. 1799-1803.

[7]. N. Hussain, A. Latif and M. H. Shah (2012), "Coupled and tripled coincidence point results without compatibility", *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:77, 10 pages.

[8]. Nguyễn Trung Hiếu và Huỳnh Ngọc Cảm, "Điểm bất động kép cho ánh xạ co suy rộng trên không gian b-mêtric thứ tự bộ phận",*Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, (10), p.107-115.

[9]. V. Lakshmikantham and L. Ćirić (2009), "Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces", *Nonlinear Anal.*, (70), p. 4341-4349.

[10]. N. V. Luong and N. X. Thuan (2011), "Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application", *Nonlinear Anal.*, (74), p. 983-992.

COUPLED COINCIDENCE POINT RESULTS WITHOUT COMMUTATIVITY OF MAPS IN PARTIALLY ORDERED b-METRIC SPACES

Summary

In this paper, we establish and prove some coupled coincidence point theorems without commutativity of maps in partially ordered b-metric spaces. Also, we give some examples to illustrate the results.

Keywords: coupled coincidence point, b-metric spaces, without commutativity of maps.