LỊCH SỬ HÌNH THÀNH PHÉP TÍNH VI - TÍCH PHÂN

• ThS. Lê Anh Tuấn(*)

Tóm tắt

Trong nghiên cứu và giảng dạy toán, lịch sử toán học là lĩnh vực thú vị và bổ ích. Bài báo giới thiệu những bài toán gắn liền với cội nguồn của phép tính vi phân và phép tính tích phân trong lịch sử. Đồng thời đề cập đến mối liên hệ giữa hai phép tính nói trên.

Từ khóa: Lịch sử, phép tính vi phân, phép tính tích phân.

1. Đặt vấn đề

Trong sách giáo khoa (SGK) môn Toán ở trường phổ thông có cung cấp một số tư liệu lịch sử toán được đặt dưới tên chung là "Em có biết?" để mở rộng kiến thức và làm cho cuốn sách thêm sinh động. Điều đó chứng tỏ tác giả sách giáo khoa đã dành cho lịch sử toán học một vị trí nhất định.

Qua nghiên cứu lịch sử toán học, người thầy giáo dạy toán có thể lựa chọn phương pháp giảng dạy thích hợp, suy nghĩ cách giáo dục sao cho gây hứng thú học tập cho học sinh. Ngoài ra, giáo viên có thể đọc thêm, kết hợp đúng lúc vào bài giảng của mình và giới thiệu ngắn gọn những nét lịch sử của vấn đề, khơi dậy thêm hứng thú học tập.

Phép tính vi - tích phân đã mở ra sự phát triển hầu hết các ngành của toán học cao cấp, làm cho toán học trở thành một khoa học có ứng dụng to lớn, tác động vào các lĩnh vực của đời sống xã hội. Vì thế, nghiên cứu lịch sử phép tính vi - tích phân đề cập trong bài viết là một vấn đề thú vị.

2. Nội dung

2.1. Những bài toán gắn liền với cội nguồn của phép tính tích phân

Một điều đáng chú ý là về mặt lịch sử, thứ tự xuất hiện hai phép tính vi phân và tích phân khác với cách trình bày chúng trong các giáo trình toán học ngày nay. Trong thực tế, phép tính tích phân ra đời trước phép tính vi phân. Hai phép tính này được phát hiện hoàn toàn độc lập với nhau. Mầm mống của phép tính tích phân đã có từ thời Hy Lạp cổ đại, trong các công trình của Archimede, liên quan đến vấn đề cầu phương, cầu tích, cầu trường. Đứng trước một hình phẳng cụ thể, mỗi nhà toán học có quan niệm riêng về diện tích và các kĩ thuật tính đặc thù. Độc lập với nhau, Newton và Leibniz đã đưa ra lời giải tổng quát của bài toán bằng ngôn ngữ tích phân, mặc dù định nghĩa chính xác của diện tích hình phẳng và của tích phân chưa được thiết lập. Cauchy là người đầu tiên định nghĩa tích phân xác định của một hàm liên tục, khảo sát sự khả tích và chứng minh định lí cơ bản của phép tính vi - tích phân trên đoạn $[x_0, X]$ như sau: $\forall x \in [x_0, X], \left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt \right)' = f(x)$ với f là hàm liên tục trên $[x_0, X]$. Riemann xây dựng lí thuyết tích phân của ông, một lý thuyết tổng quát hơn của Cauchy, nhằm có thể khai triển một cách chính xác các hàm có vô hạn điểm gián đoạn thành chuỗi Fourier.

Ta có thể tóm tắt tiến trình xây dựng này theo Sơ đồ 1.

Bài toán diện tích

↓

Tính tổng một số vô cùng lớn
các diện tích vô cùng bé
(không chuyển qua giới hạn)

↓

Tích phân bất định và xác định
(chưa định nghĩa tường minh)

↓

Công thức Newton - Leibniz
(nửa cuối thế kỉ XVII)

↓

Tích phân Cauchy (1823)

↓

Tích phân Riemann (1845)

Sơ đồ 1. Tiến trình xây dựng phép toán tích phân

(*) Khoa Sư phạm Khoa học - Tự nhiên, Trường Đại học Đồng Nai.

Các nhà toán học trước Cauchy chưa định nghĩa được một cách chính xác khái niệm hàm số và khái niệm giới hạn, hai trở ngại lớn nhất khi định nghĩa tích phân. Họ quan niệm tích phân một cách trực giác và tính tích phân trước khi quan tâm đến điều kiện khả tích lẫn tính hợp thức của các kỹ thuật được sử dụng.

2.2. Những bài toán gắn liền với cội nguồn của phép tính vi phân

Phép tính vi phân sinh ra từ việc giải bài toán vẽ tiếp tuyến của các đường cong, tìm các giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số và tìm vận tốc tức thời của một chuyển động. Việc xem xét các vấn đề như vậy có thể thấy từ thời Hy Lạp cổ đại, người ta thừa nhận rằng tiền thân của phép tính vi phân thực sự bắt nguồn từ những tư tưởng mà Fermat đã hình thành vào năm 1629.

2.2.1. Phương pháp xác định cực đại và cực tiểu của Fermat

Fermat là người đầu tiên có những ý tưởng cơ bản rất gần gũi với phép lấy đạo hàm ngày nay. Cụ thể là xuất phát từ nguyên lý dừng của Kepler: "số gia của một hàm số sẽ trở nên nhỏ tới mức triệt tiêu tại lân cận của một giá trị cực đại hoặc cực tiểu thường". Fermat đã đưa ra một phương pháp để xác định các cực đại và cực tiểu của hàm số f. Theo kí hiệu hiện đại, phương pháp của ông có thể được mô tả như sau:

+ Với h là rất nhỏ, cho $f(x+h) = f(x)$

+ Đơn giản những số hạng giống nhau ở hai vế, rồi chia hai vế cho h.

Bỏ đi những số hạng có chứa h (tức là xem như $h = 0$) và từ đó xác định được những giá trị x mà tại đó f đạt cực đại hay cực tiểu.

Về mặt logic, cách lập luận của Fermat còn nhiều chỗ chưa rõ ràng: ban đầu h là một số hữu hạn khác không, do đó ông tiến hành chia cho h, nhưng sau đó lại cho $h = 0$ mà không đưa ra một cách giải thích hợp lí. Rõ ràng là ông gặp khó khăn với phép lấy giới hạn và khái niệm vô cùng bé. Vào thời kì này hai khái niệm đó chưa được định nghĩa chính xác. Tuy nhiên, phải nói rằng ở đây đã hiện hữu tư tưởng về khái niệm vô cùng bé (mặc dù Fermat không nói nhưng h đóng vai trò số gia rất bé), giới hạn $h \to 0$ (một số mà lúc thì nó hữu hạn rất nhỏ rồi tự nhiên nó lại có thể bằng không) và phép lấy đạo hàm của một hàm số (về cơ bản mà Fermat thực hiện tương tự như quá trình tìm đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)$ và cho $f'(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0\right)$.

2.2.2. Phương pháp xác định tiếp tuyến của Fermat

Fermat là người đầu tiên đưa ra một cách hiểu mới về tiếp tuyến. Đó là vị trí giới hạn của cát tuyến khi hai điểm mà nó cắt đường cong đến chỗ trùng nhau, tất nhiên lúc đó khái niệm không được định nghĩa rõ ràng theo ngôn ngữ của giới hạn.

Với cách hiểu này, ông đã giải bài toán tìm tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại $M(x, y)$ theo một qui trình tương tự với qui trình đã được sử dụng trong lời giải bài toán xác định cực đại, cực tiểu. Chính ông đã nhấn mạnh tính thống nhất của các phương pháp tính toán trong hai bài toán trên. Nhưng ông không nêu bật được khái niệm cơ bản của phép tính vi phân - đạo hàm và vi phân, cũng như không lưu ý tới mối quan hệ giữa những bài toán này và bài toán cầu phương đã có trước đó.

Người ta cho rằng có lẽ là do sử dụng những công cụ đại số khá khó hiểu của Viete với các kí hiệu cồng kềnh của nó, Fermat đã không bước thêm được bước cuối cùng, dù không lớn trên con đường xây dựng phép tính vi phân. Tuy nhiên, phải công nhận rằng ông đã có những đóng góp quan trọng cho sự phát triển các ý tưởng của phép tính này.

2.3. Mối liên hệ giữa phép tính vi phân và tích phân

2.3.1. Bài toán dẫn đến sự phát hiện ra mối quan hệ

Cùng với bài toán dựng tiếp tuyến, trong toán học cũng như trong các lĩnh vực khoa học khác xuất hiện những bài toán dạng: xác định các đường cong xuất phát từ tính chất chung của tất cả các tiếp tuyến với chúng. Vấn đề này được phát biểu một cách tổng quát như sau. Tìm $y = f(x)$ từ điều kiện $f_1(x, y, y') = 0$. Theo ngôn ngữ hiện đại, giải bài toán này tương đương với việc giải phương trình vi phân cấp một có ẩn hàm y.

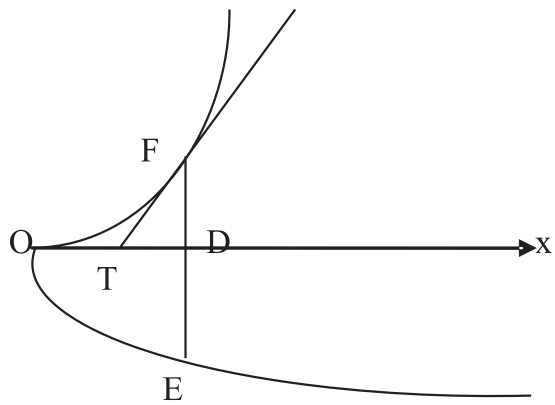
Descartes (1596 - 1650) là người đầu tiên bắt tay vào việc tìm một phương pháp tổng quát để giải những bài toán loại này. Ông tiến hành phân tất cả các đường cong đại số theo loại, rồi tìm các tiếp tuyến của chúng và thử xem những tiếp tuyến này có thỏa mãn các tính chất đã cho hay không.

Về phương diện thực hành, phương pháp của Descartes tỏ ra không khả thi. Vấn đề phân loại đường cong gây cho ông một số rắc rối khi giải nhiều bài toán. Tuy nhiên, chính là thông qua việc giải những bài toán xác định đường cong nêu trên mà dần dần tính chất ngược nhau của loại bài toán này và bài toán vạch tiếp tuyến đã được chỉ rõ.

2.3.2. Hình thành mối liên hệ giữa phép tính vi phân và tích phân

Nhà toán học Anh Isaac Barrow (1630 - 1677) được xem là người đầu tiên nhận rõ mối liên hệ giữa bài toán xác định tiếp tuyến và bài toán cầu phương. Theo cách kí hiệu hiện đại, ông chỉ ra được rằng, từ đẳng thức $y = a + \int_0^x z dx$ suy ra $dy = z dx$, và ngược lại.

Cụ thể Barrow xét hai đường cong OF và OE có phương trình tương ứng là $y = y(x)$ và $y = y(x)$, $F(x, y)$, $E(x, v)$ liên hệ với nhau theo điều kiện $DF.R = S_{ODE}$ (viết theo kí hiệu ngày nay là $R.y = \int_0^x v dx$), với R là một số cho trước, *D, T* tương ứng là giao điểm của O*x* với EF và tiếp tuyến tại F (Hình 1).



Hình 1

Ông đã chứng minh được đẳng thức $R.\frac{DF}{DT} = DE$ (nghĩa là $R.\frac{dy}{dx} = v$) bằng hai phương pháp khác nhau: dựa vào quan điểm động học và dựa vào phương pháp hình học trong đó có sử dụng phương pháp tính diện tích hình thang cong.

Như thế, Barrow đã nhận ra mối quan hệ thuận nghịch giữa phép tính vi phân và tích phân. Tuy nhiên việc chưa thiết lập được dưới dạng tổng quát những khái niệm cơ bản của phép tính vi - tích phân, việc trình bày mối liên hệ này bằng ngôn ngữ hình học đã ngăn cản ông diễn đạt một cách tường minh ý tưởng của mình.

Kể từ khám phá mới này của Barrow, hai phép tính vi phân, tích phân và mối quan hệ giữa chúng luôn gắn kết chặt chẽ với nhau trong những công trình nghiên cứu của các nhà khoa học.

2.3.3. Xuất hiện tường minh các khái niệm tích phân, vi phân và quan hệ giữa chúng

Mặc dù có nhiều nhà toán học dần tiếp cận với các phép tính vi - tích phân, nhưng Newton (1642 - 1727) và Leibniz (1646 - 1716) mới được coi là người phát minh ra chúng.

Newton xem một đường như được sinh ra bởi chuyển động liên tục của một điểm. Các đại lượng vô cùng bé, tương đương với các số gia vô cùng bé của Fermat được Newton gọi là các moment. Giả sử S là diện tích đã biết của một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số không âm $y = f(x)$ các trục tọa độ và đường thẳng $x = x_0$ $(x_0 > 0)$. Newton xét moment diện tích oS (số gia ΔS của diện tích) khi x_0 tăng lên một lượng vô cùng bé kí hiệu o (số gia Δx_0 của x_0). Ông nhận thấy tỉ số biến thiên của diện tích $(\frac{oS}{o})$ bằng $f(x_0)$. Kết quả này phát biểu theo ngôn ngữ hiện đại là $S'(x_0) = f(x_0)$.

Để xác định phần diện tích S thì Newton lại đảo ngược các thao tác lấy đạo hàm, nêu rõ mối liên hệ giữa bài toán tính diện tích và bài toán đạo hàm. Trong các nghiên cứu của mình, Newton đặt đạo hàm vào vị trí trung tâm của tiến trình. Theo quan niệm của ông, tích phân trước hết là tích phân không xác định, như là nguyên hàm bất kì được tính bằng cách đảo ngược kết quả của bài toán tính đạo hàm. Tuy nhiên, người ta không tìm thấy ở ông các định nghĩa tường minh về đạo hàm và tích phân cũng như moment hay số gia vô cùng bé.

Nếu như Newton chọn khái niệm đầu tiên là vận tốc thì ở Leibniz khái niệm đầu tiên là tiếp tuyến. Các kí hiệu *dx* và *dy* đã được đưa ra. Theo ông dx - vi phân của đối số được xem như một đại lượng hoàn toàn tùy ý và dy - vi phân của hàm số được xác định qua dx.

Lúc đầu, Leibniz có ý định tránh các vô cùng bé. Các vi phân được hiểu là những đại lượng tỉ lệ với các số gia của đối số và hàm số. Về sau, các vi phân được xác định như các hiệu vô cùng bé. Về cơ bản, vô cùng bé, theo Leibniz, là hiệu hai giá trị gần nhau của đại lượng. Từ đó vô cùng bé được kí hiệu bằng d (chữ đầu của differentia - có nghĩa là hiệu). Đạo hàm được hiểu là tỉ số các vi phân dx và dy.

Khác với Newton, tích phân của Leibniz trước hết là tích phân xác định, dưới dạng tổng vô hạn các vô cùng bé vi phân mà một đại lượng nào đó có thể phân chia ra. Như vậy, Leibniz lấy vi phân làm khái niệm trung tâm, từ đó ông định nghĩa đạo hàm và tích phân. Chính ông đã đưa ra kí hiệu $\int$ và chứng minh rằng $\int dy = y$.

Cauchy (1789 - 1975) là người đầu tiên đưa ra một định nghĩa chính xác của tích phân (vào năm 1823). Ông dùng kí hiệu $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx$ do Fourier đề nghị để chỉ tích phân xác định. Ông đã chứng minh được rằng $F'(x) = f(x)$ trong đó, $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ thiết lập tường minh mối liên hệ giữa việc tính tích phân và việc lấy đạo hàm.

Về mặt toán học thì các công thức $S'(x_0) = f(x_0)$ của Newton, $\int dy = y$ của Leibniz và $F'(x) = f(x)$ của Cauchy rất gần gũi nhau. Hơn nữa, cũng từ phương pháp giải bài toán cầu phương, cầu tích đã sử dụng mà họ có thể chứng minh được rằng $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Công thức này mang lại một phương tiện cơ bản để tính các tích phân xác định.

Euler, Lagrange, D'Alembert và nhiều người khác đã làm cho phép tính vi - tích phân trở nên chặt chẽ hơn. Năm 1797, Lagrange tìm cách xây dựng toàn bộ phép tính vi phân mà không dùng khái niệm vô cùng bé, có tính chất thuần túy đại số, bằng cách biểu diễn hàm dưới dạng khai triển ra chuỗi lũy thừa và xác định đạo hàm như là hệ số ở số hạng thứ hai của khai triển ấy.

Riemann (1826 - 1866), trong luận văn của mình, đã xây dựng một lý thuyết tích phân tổng quát hơn của Cauchy, nhằm khai triển một cách chính xác các hàm số có vô hạn điểm gián đoạn thành chuỗi Fourier.

Sau này khái niệm tích phân tiếp tục được hoàn thiện và phát triển nhờ các công trình của nhiều nhà toán học như Lebesgue, Radon, Riesz, Stieltjes, Denjoy, Borel, Khintchine, Kolmogorov,...

Tuy nhiên, trong nền tảng này vẫn còn lỗ hổng là vẫn chưa đủ cơ sở chặt chẽ cho chính khái niệm số thực và việc chứng minh tính liên tục của phạm vi các số thực. Điều này chỉ được thực hiện vào cuối thế kỉ XIX.

3. Kết luận

Trong lịch sử, hai phép tính vi phân và tích phân đã được phát hiện hoàn toàn độc lập với nhau. Mầm mống của phép tính tích phân đã có từ thời Hy Lạp cổ đại, trong các công trình của Archimede, liên quan đến vấn đề cầu phương, cầu tích, cầu trường. Vào thế kỉ XVII, những tư tưởng của phép tính vi phân mới được hình thành qua nghiên cứu của Fermat trên việc giải các bài toán tìm tiếp tuyến, cực đại, cực tiểu của hàm số và việc nghiên cứu các chuyển động. Fermat đã nhấn mạnh tính thống nhất của phương pháp giải các bài toán đó, nhưng không lưu ý tới mối quan hệ giữa chúng với vấn đề cầu phương. Chính từ việc xác định đường cong khi biết tiếp tuyến của nó mà Barrow đã thiết lập được cầu nối giữa bài toán cầu phương và bài toán dựng tiếp tuyến. Quan hệ thuận nghịch giữa hai phép tính vi phân, tích phân thể hiện rất rõ qua các công thức do Newton, Leibniz, Cauchy chứng minh, mà ngày nay ta gọi là định lí cơ bản của hai phép tính này. Mối liên hệ đó dẫn đến một sự liên hệ tương ứng giữa các tính chất của hai phép tính là từ tính chất của phép tính này ta chứng minh được tính chất tương ứng của phép tính kia và ngược lại. Chính vì điều này, trong quá trình giảng dạy về hai phép tính vi phân và tích phân, giáo viên (GV) cần phải hướng dẫn cho học sinh (HS) thấy rõ có sự liên hệ giữa chúng. Từ đó tạo thuận lợi hơn cho việc tiếp thu các kiến thức mới. Ngoài ra, qua nghiên cứu việc xây dựng phép tính vi - tích phân ở SGK toán phổ thông chúng ta thấy có sự chuyển đổi sư phạm như sau: SGK hiện hành xây dựng khái niệm đạo hàm dựa vào bài toán xác định vận tốc tức thời của một vật thể chuyển động ở thời điểm cho trước. Khái niệm tích phân được SGK định nghĩa thông qua nguyên hàm. Sự thay đổi này đôi khi làm mất nghĩa của các tri thức nói trên. Vì lẽ đó, để giúp việc dạy học phép tính vi - tích phân có hiệu quả GV cần chú trọng hơn đến việc thiết kế các hoạt động dạy học góp phần cho HS hiểu rõ hơn đặc trưng khoa học luận của các đối tượng nói trên./.

Tài liệu tham khảo

[1]. Bùi Thị Thu Hiền (2007), *Mối liên hệ giữa tiếp tuyến và đạo hàm - Một nghiên cứu khoa học luận và sư phạm,* Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TPHCM.

[2]. Trần Lương Công Khanh (2002), *Nghiên cứu didactic về những khó khăn chính của học sinh khi tiếp thu khái niệm tích phân,* Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TPHCM.

[3]. Nguyễn Phú Lộc (2008), *Lịch sử Toán học*, NXB Giáo dục.

[4]. Trần Trung - Nguyễn Chiến Thắng (2013), *Lịch sử kiến thức toán học ở trường phổ thông*, NXB Đại học sư phạm.

[5]. Nguyễn Anh Tuấn (2012), *Giáo trình Lôgic toán và lịch sử toán học*, NXB Đại học sư phạm.

[6]. Victor J. Katz (1998), *A history of mathematics*, *An introduction*, Addison Wesley.

THE HISTORY OF DIFFERENTIATION AND INTEGRATION

Summary

The math history of mathematics is an interesting and useful area of research and instruction. The paper presents the historic origin of differentiation and integration. Also, it discusses the relationship between these two operations.

Key words: history, differentiation, integration.