ĐA TẠP CON f-CỰC TIỂU VÀ ĐỊNH LÝ KIỂU BERNSTEIN TRONG KHÔNG GIAN TÍCH $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$

• TS. Trần Lê Nam(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng các khái niệm f-vectơ độ cong trung bình và đa tạp con f-cực tiểu. Từ đó, chúng tôi chứng minh rằng đồ thị f-cực tiểu toàn phần của một hàm khả vi đạt cực trị tại một điểm trong không gian $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, phải là một mặt phẳng.

Từ khóa: Bernstein, mật độ, độ cong trung bình, đồ thị toàn phần, Lagrange.

1. Giới thiệu

Trong những năm gần đây việc nghiên cứu và sự quan tâm đến đa tạp với mật độ được gia tăng rất nhanh do các ứng dụng của nó trong Toán học và Vật lý. Đa tạp với mật độ là một đa tạp Riemann (M,g) với một hàm trơn, dương, thường được ký hiệu e^{-f}, được dùng làm trọng số cho thể tích k-chiều, $k=1,\ldots,n$ (xem [1], [2], [6]). Sau khi được gia thêm mật độ, mêtric trên M thay đổi nhưng cấu trúc tôpô của M vẫn được giữ nguyên. Do đó, nó là một công cụ rất hữu hiệu khi giải quyết các bài toán liên quan đến tôpô trên đa tạp như giả thuyết Poincaré và định lý tách đa tạp (xem [8]).

Trên đa tạp M với mật độ e^{-f}, Gromov đã đề xuất định nghĩa f-độ cong trung bình của siêu mặt Σ (xem [2]) bởi đẳng thức:

$$H_f = H + \frac{df}{d\mathbf{N}}, \qquad (1.1)$$

ở đó H, $\mathbf{N}$ lần lượt là độ cong trung bình và vectơ pháp đơn vị của Σ. Định nghĩa trên đã được kiểm tra thỏa mãn biến phân thứ nhất và thứ hai của phiếm hàm f-diện tích. Tuy nhiên, do các nhà nghiên cứu thuộc lĩnh vực này chỉ tập trung làm việc trên các siêu mặt nên các khái niệm hình học của một đa tạp con bất kì trong M chưa được chuyển sang ngôn ngữ của mật độ. Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng các khái niệm f-vectơ độ cong trung bình, f-cực tiểu cho một đa tạp con. Từ đó, chúng tôi chứng minh một định lý kiểu Bernstein cho mặt 2-chiều trong không gian $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, ở đó $\mathbb{G}^2$ là mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với mật độ Gauss $e^{-(x^2+y^2)/2}$.

Cho $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $n\geq 2$, $m\geq 1$, là một hàm khả vi sao cho đồ thị Σ của nó trên toàn bộ $\mathbb{R}^n$ là một mặt cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^{n+m}$. Với điều kiện nào của hàm u thì Σ phải là một n-phẳng? Đây là một trong các bài toán được quan tâm nhiều trong lý thuyết mặt cực tiểu (xem [9]). Năm 1917, Bernstein đã chứng minh định lý trong trường hợp u là một hàm khả vi cấp 2 từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}$. Đồng thời, ông dự đoán rằng định lý vẫn đúng trong trường hợp $m=1$ và n tổng quát. Sau đó, Giorgi, Almgren và Simons lần lượt chứng minh định lý đúng cho các trường hợp $n=3, 4, 5, 6, 7$. Tuy nhiên, bài toán trong trường hợp $m=1$ được khép lại vào năm 1969 khi Bombieri, Giorgi và Giusti chỉ ra được một đồ thị cực tiểu toàn phần không phải là n-phẳng khi $n\geq 8$. Bắt đầu từ đó, các nhà hình học quan tâm đến định lý Bernstein với đối chiều cao. Năm 1969, Osserman đã chứng minh rằng một đường cong giải tích phức có đồ thị toàn phần là một mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ và xây dựng được một đồ thị toàn phần cực tiểu không phải là đường cong giải tích phức. Đó là đồ thị của hàm $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ được cho bởi:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left(e^x-3e^{-x}\right)\left(\cos\frac{y}{2},-\sin\frac{y}{2}\right).$$

Kết quả mới nhất của bài toán là giả thuyết hàm u khả vi cấp hai và có Jacobian bị chặn của Hasanis, Halila và Vlachos (xem [3]).

Nếu chúng ta gia thêm mật độ vào các không gian trong định lý Bernstein thì nó không còn đúng đối với một số mật độ. Ví dụ

(*) Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

(xem [4]) mặt tịnh tiến được cho bởi tham số $X(u,v)=(u,v,g(u)+h(v))$, ở đó

$$\begin{cases} g(u)=u, \\ h(v)=-2\log\left|\cos\left(v/\sqrt{2}\right)\right|, u,v\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

là f-cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^3$ với mật độ e^z. Tuy nhiên, định lý Bernstein vẫn còn đúng trong một số mật độ. Chẳng hạn không gian Gauss (xem [10]) hay không gian tích $\mathbb{G}^n\times\mathbb{R}$ (xem [5]). Trong mục 3, chúng tôi chứng minh rằng nếu một hàm khả vi cấp 2 $u:\mathbb{G}^2\to\mathbb{R}^n, n\geq 1,$ có cực trị địa phương tại 1 điểm và đồ thị là f-cực tiểu thì u phải là một hàm hằng.

2. Đa tạp con f-cực tiểu

2.1. f-vectơ độ cong trung bình của đa tạp con

Cho Σ là một đa tạp con k-chiều định hướng có biên hoặc không có biên trong đa tạp Riemann (M^n,g) với mật độ e^{-f} và liên thông Levi-Civita ∇.

Với mỗi trường vectơ X trên Σ, chúng ta ký hiệu X^T và X^N lần lượt là thành phần tiếp xúc và thành phần pháp của nó.

f-vectơ độ cong trung bình, ký hiệu $\vec{H}_f$, tại x của Σ được định nghĩa bởi:

$$\vec{H}_f := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\nabla_{E_i}E_i\right)^N+\left(\nabla f\right)^N=\vec{H}+\left(\nabla f\right)^N,$$

ở đó $\{E_i\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian tiếp xúc $T_x\Sigma$ của Σ tại x và ∇f là gradient của hàm f tại x.

Đa tạp con Σ được gọi là f-*cực tiểu* nếu $\vec{H}_f$ của nó bằng vectơ $\vec{0}$ tại mọi điểm.

Nhận xét.

- Định nghĩa $\vec{H}_f$ là độc lập với việc chọn cơ sở trực chuẩn $\{E_i\}$.

- Nếu $\dim\Sigma=n-1$ thì đại lượng $H_f=\vec{H}_f.\mathbf{N}$, ở đó $\mathbf{N}$ là vectơ pháp đơn vị của Σ, chính là f-độ cong trung bình theo định nghĩa của Gromov.

2.2. f-vectơ độ cong trung bình của mặt tham số trong không gian với mật độ

Khi Σ là một mặt tham số chính qui trong không gian Ơclít $\mathbb{R}^n$ thì chúng ta có thể xây dựng định nghĩa f-vectơ độ cong trung bình của Σ mà nó tương đương với định nghĩa trong mục 2.1. Hơn nữa, định nghĩa này cho chúng ta các phương trình xác định điều kiện f-cực tiểu của mặt Σ.

Cho Σ là một mặt tham số chính qui trong không gian $\mathbb{R}^n$ với mật độ e^{-f}. Với mỗi vectơ pháp đơn vị $\mathbf{N}$ của Σ, *f-độ cong trung bình* của Σ tương ứng với $\mathbf{N}$, ký hiệu $H_f(\mathbf{N})$, được định nghĩa bởi:

$$H_f(\mathbf{N}):=H(\mathbf{N})+\langle\nabla f,\mathbf{N}\rangle, \qquad (2.1)$$

trong đó $H(\mathbf{N})$ là độ cong trung bình của Σ tương ứng với vectơ pháp $\mathbf{N}$.

Theo (2.1), chúng ta có

$$H_f(\mathbf{N})=\frac{g_{22}b_{11}(\mathbf{N})+g_{11}b_{22}(\mathbf{N})-2g_{12}b_{12}(\mathbf{N})}{\det(g_{ij})}+\langle\nabla f,\mathbf{N}\rangle, \qquad (2.2)$$

trong đó (g_{ij}) và (b_{ij}) lần lượt là ma trận của dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của Σ. Từ phương trình (2.2), chúng ta thấy rằng $H_f(\mathbf{N})$ là tuyến tính theo $\mathbf{N}$. Từ đó suy ra tồn tại duy nhất một vectơ $\vec{H}_f\in(T_p\Sigma)^\perp$ sao cho

$$H_f(\mathbf{N})=\langle\vec{H}_f,\mathbf{N}\rangle,\ \forall\ \mathbf{N}\in(T_p\Sigma)^\perp.$$

Chúng ta để ý rằng nếu gọi $\vec{H}$ là vectơ độ cong trung bình của Σ và $(\nabla f)^\perp$ là thành phần trực giao của ∇f thì chúng ta có

$$\left\langle\vec{H}+(\nabla f)^\perp,\mathbf{N}\right\rangle=H_f(\mathbf{N}),$$

với mọi vectơ pháp $\mathbf{N}$. Do đó, $\vec{H}_f=\vec{H}+(\nabla f)^\perp$. Chúng ta vẫn gọi mặt tham số Σ có vectơ $\vec{H}_f=\vec{0}$ là mặt f-*cực tiểu.*

Ví dụ. Cho $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ là 2 vectơ đơn vị, trực giao với nhau trong không gian $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$. Khi đó, mặt phẳng $(\Sigma): X(u,v)=u\vec{a}_1+v\vec{a}_2, (u,v)\in\mathbb{R}^2$, là một mặt f-cực tiểu trong $\mathbb{G}^n$.

Thật vậy, gọi $\vec{a}_3,\ldots,\vec{a}_n$ là các vectơ trong không gian $\mathbb{R}^n$ sao cho $\{\vec{a}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ là một cơ sở trực chuẩn. Với mỗi điểm $M(x_i)\in\Sigma$, chúng ta có $\overrightarrow{OM}.\vec{a}_k=0$, với mọi $k=3,\ldots,n$ và

$$\nabla f\left(x\right)=\nabla\left(|x|^2/2\right)=\left(x_i\right).$$

Do đó, chúng ta được:

$$\nabla f(M)=\sum_{i=1}^{2}\langle\vec{a}_i,\nabla f\rangle\vec{a}_i+\sum_{k=3}^{n}\langle\vec{a}_k,\nabla f\rangle\vec{a}_k$$

$$=-\sum_{i=1}^{2}\langle\vec{a}_i,\overrightarrow{OM}\rangle\vec{a}_i.$$

Từ đó, chúng ta suy ra $\left(\nabla f\right)^{\perp}=\vec{0}$.

Mặt khác, chúng ta lại có $\vec{H}=\vec{0}$. Do đó $\vec{H}_f=\vec{0}$.

3. Định lý kiểu Bernstein trong không gian $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$

Trong [9], Osserman đã xây dựng phương trình Lagrange cho mặt cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^n$. Thực hiện tính toán hoàn toàn tương tự, chúng ta được định lý sau.

3.1. Định lý. *Cho $u:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n, n\geq 1$, là một hàm khả vi được xác định bởi*

$$u\left(x_1,x_2\right)=\left(u_3(x_1,x_2),\ldots,u_{n+2}(x_1,x_2)\right),\ \forall(x_1,x_2)\in D.$$

Khi đó, đồ thị Σ của hàm u trên D là một mặt f-cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^{n+2}$ với mật độ e^{-f} khi và chỉ khi

$$g_{22}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+g_{11}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}-2g_{12}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1\partial x_2}+\det\left(g_{ij}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial u_k}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=0, \qquad (3.1)$$

với mọi $k=3,\ldots,n+2$. Ở đó, g_{ij} là các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất được xác định bởi:

$$g_{11}=1+\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2,\ g_{12}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2},\ g_{22}=1+\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2.$$

Xét các trường hợp đặc biệt của hàm f, chúng ta được 3 hệ quả sau.

3.2. Hệ quả. *Mặt tham số Σ là f-cực tiểu trong $\mathbb{R}^2\times\mathbb{G}^n$ khi và chỉ khi*

$$g_{22}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+g_{11}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}-2g_{12}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1\partial x_2}-\det\left(g_{ij}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial u_k}{\partial x_2}x_2\right)=0,$$

với mọi $k=3,\ldots,n+2$.

Chứng minh. Chọn $f=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}$ thay vào đẳng thức (3.1).

3.3. Hệ quả. *Mặt tham số Σ là f-cực tiểu trong $\mathbb{R}^2\times\mathbb{G}^n$ khi và chỉ khi*

$$g_{22}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+g_{11}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}-2g_{12}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1\partial x_2}+\det\left(g_{ij}\right)u_k=0,$$

với mọi $k=3,\ldots,n+2$.

Chứng minh. Chọn $f=\dfrac{x_3^2+\cdots+x_{n+2}^2}{2}$ thay vào đẳng thức (3.1).

3.4. Hệ quả. *Mặt tham số Σ là f-cực tiểu trong $\mathbb{G}^{n+2}$ khi và chỉ khi*

$$g_{22}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}+g_{11}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}-2g_{12}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1\partial x_2}+\det\left(g_{ij}\right)\left(u_k-\frac{\partial u_k}{\partial x_1}x_1-\frac{\partial u_k}{\partial x_2}x_2\right)=0,$$

với mọi $k=3,\ldots,n+2$.

Chứng minh. Chọn $f=\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2\cdots+x_{n+2}^2}{2}$ thay vào đẳng thức (3.1).

3.5. Định lý (Định lý kiểu Bernstein trong $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$). *Trong không gian $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$, cho Σ là một mặt f-cực tiểu, được xác định bởi tham số*

$$X\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1,x_2,u_3(x_1,x_2),\ldots,u_{n+2}(x_1,x_2)\right),(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Khi đó, nếu tồn tại bộ $\left(x_1^0,x_2^0\right)$ trên $\mathbb{R}^2$ sao cho u_k đạt cực trị tại $\left(x_1^0,x_2^0\right)$ với mọi $k=3,\ldots,n+2$, thì Σ là một mặt phẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng $x_k=0$, $k=3,\ldots,n+2$.

Chứng minh. Chúng ta xét toán tử L được xác định bởi:

$$L=\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}g_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\det(g_{ij})\sum_{i=1}^{2}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Khi đó, theo Hệ quả 3.2, $L(u_k)=0,\ k=3,\ldots,n+2$. Mặt khác, do ma trận $\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}$ là xác định dương nên L là đều elliptic trên $\mathbb{R}^2$.

Với mọi điểm $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, chúng ta đặt $r=d\left((x_1,x_2),(x_1^0,x_2^0)\right)+1$. Áp dụng nguyên lý cực đại cho toán tử L đối với các hàm u_k trong hình cầu tâm (x_1^0,x_2^0) bán kính r, chúng ta được $u_k(x_1,x_2)=u_k(x_1^0,x_2^0)$, với mọi $k=3,\ldots,n+2$. Do đó, các hàm u_k là hằng.

Tài liệu tham khảo

[1]. R. Corwin, N. Hoffman, S. Hurder, V. Sesum, and Y. Xu (2006), "Differential geometry of manifolds with density", *Rose-Hulman Und. Math. J.*, 7(1).

[2]. M. Gromov (2003), "Isoperimetry of waists and concentration of maps", *Geom. Funct. Anal.*, (13), p. 178-215.

[3]. Th. Hasanis, A.S. Halila, and Th. Vlachos (2009), "Minimal graphs in $\mathbb{R}^4$ with bounded Jacobians", *Proc. Amer. Math. Soc.,* 137(10), p. 3463-3471.

[4]. D.T. Hieu and N.M. Hoang (2009), "Ruled minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ with density e^z", *Pacific Journal of Mathematics*, 243(2), p. 277-285.

[5]. D.T. Hieu and T.L. Nam (2014), "Bernstein type theorem for entire weighted minimal graphs in $\mathbb{G}^n\times\mathbb{R}$", *Journal of Geometry and Physics*, (81), p. 89-91.

[6]. F. Morgan (2005), "Manifolds with density", *Notices Amer. Math. Soc.*, (52), p. 853-858.

[7]. F. Morgan (2006), "Myers Theorem with density", *Kodai Math. J.*, (29), p. 454-460.

[8]. F. Morgan (2009), "Manifolds with density and Perelman's proof of the Poincare Conjecture", *Amer. Math. Monthly*, (116), p. 134-142.

[9]. R. Osserman (2002), *A survey on minimal surfaces,* Courier Dover Publications.

[10]. L. Wang (2011), "A Bernstein type theorem for self-similar shrinkers", *Geom. Dedicata*, (151), p. 297-303.

THE f-MINIMAL SUBMANIFOLDS AND A BERNSTEIN TYPE THEOREM IN THE PRODUCT SPACE $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n$

Summary

In this paper, we construct definitions of f-mean curvature vector and f-minimal submanifolds. Accordingly, we prove that a f-minimal entire graph of a differential function reaching a critical point in the product space $\mathbb{G}^2\times\mathbb{R}^n,\ n\geq 1,$ must be a plane.

Keywords: Bernstein, density, mean curvature, entire graph, Lagrange.