ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG VỚI ĐIỀU KIỆN CO HỮU TỈ TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC CHỮ NHẬT SẮP THỨ TỰ

• ThS. Nguyễn Trung Hiếu(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập và chứng minh một số định lí điểm bất động với điều kiện co hữu tỉ trong không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả trong [4], [8]. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động, điều kiện co hữu tỉ, không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự.

1. Giới thiệu

Mêtric là một khái niệm cơ bản trong Giải tích toán học. Bằng cách thay thế bất đẳng thức tam giác trong khái niệm mêtric bởi một bất đẳng thức tổng quát hoặc mở rộng hàm hai biến thành hàm ba biến, nhiều khái niệm mêtric suy rộng đã được giới thiệu và nghiên cứu như 2-mêtric, b-mêtric, mêtric riêng phần,... Các mêtric suy rộng này có vai trò quan trọng trong việc thiết lập những mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ cho những lớp không gian tổng quát hơn. Năm 2000, Branciari [3] giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng là mêtric chữ nhật. Kể từ đó, việc nghiên cứu những tính chất của không gian mêtric chữ nhật cũng như việc thiết lập những định lí điểm bất động trên không gian này thu hút sự quan tâm của một số tác giả [1], [2], [9]. Khái niệm mêtric chữ nhật được giới thiệu như sau.

Định nghĩa 1.1 ([3]). Cho X là một tập khác rỗng và ánh xạ $d : X \times X \to [0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, y \in X$ và với mọi $u \neq v \in X \setminus \{x, y\}$.

(1) $d(x,y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) \le d(x,u) + d(u,v) + d(v,y)$.

Khi đó, d được gọi là một *mêtric chữ nhật* và (X,d) được gọi là một *không gian mêtric chữ nhật*.

Nhận xét 1.2 ([1]). Mỗi mêtric là một mêtric chữ nhật. Tuy nhiên, tồn tại một mêtric chữ nhật không là một mêtric, xem [1, Example 1.2].

(*) Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Với mục đích mở rộng Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ cho những lớp ánh xạ khác nhau, nhiều tác giả đã giới thiệu những điều kiện co suy rộng. Năm 1975, Dass và cộng sự [7] đã giới thiệu một điều kiện co chứa biểu thức hữu tỉ và thiết lập một mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ. Sau đó, điều kiện co chứa biểu thức hữu tỉ này được nhiều tác giả mở rộng và tổng quát trong không gian mêtric, không gian mêtric sắp thứ tự, không gian mêtric suy rộng cũng như không gian mêtric suy rộng sắp thứ tự [4], [5], [6], [10]. Năm 2012, Erhan và cộng sự [8] đã tổng quát điều kiện co chứa biểu thức hữu tỉ trong [4] trên không gian mêtric chữ nhật đầy đủ. Kết quả chính của [8] được trình bày như sau.

Kí hiệu Ψ là tập hợp các hàm số đơn điệu không giảm, liên tục $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn $\psi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$; Φ là tập hợp các hàm số liên tục $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ thỏa mãn $\phi(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

Định lí 1.3 ([8], Theorem 9). *Cho (X,d) là một không gian mêtric chữ nhật đầy đủ, Hausdorff và ánh xạ $T : X \to X$. Giả sử tồn tại hàm $\psi \in \Psi$ và hàm $\phi \in \Phi$ sao cho*

$$\psi(d(Tx,Ty)) \le \psi(M(x,y)) - \phi(M(x,y)) \quad (1.1)$$

với mọi $x, y \in X$, trong đó

$$M(x,y) = \max\{d(x,y), \frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)} d(y,Ty)\}.$$

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng định lí điểm bất động với điều kiện co chứa biểu thức hữu tỉ trong không gian mêtric chữ nhật [8] sang không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ chứng tỏ kết quả đạt được là tổng quát hơn các kết quả trong [8]. Trước hết, chúng tôi giới thiệu những khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.4 ([3]). Cho (X,d) là một không gian mêtric chữ nhật. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$.

(3) Không gian (X,d) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X,d) là một dãy hội tụ.

Bổ đề 1.5 ([9]). *Cho (X,d) là một không gian mêtric chữ nhật, $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong X và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y)=d(x,y)$ với mọi $y\in X$.*

2. Các kết quả chính

Định lí sau là một sự tổng quát của Định lí 1.3 từ không gian mêtric chữ nhật sang không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự.

Định lí 2.1. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ $T:X\to X$ thỏa mãn*

(1) T là ánh xạ đơn điệu không giảm.

(2) Tồn tại hàm $\psi\in\Psi$, hàm $\phi\in\Phi$ sao cho $\psi(d(Tx,Ty))\le\psi(M(x,y))-\phi(M(x,y))$ với mọi $x,y\in X$ mà $x\preceq y$, trong đó

$$M(x,y)=\max\{d(x,y),\frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)}d(y,Ty)\}.$$

(3) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $x_0\preceq Tx_0$.

(4) T là ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu không giảm và $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ thì $x_n\preceq x$ với mọi $n\ge 0$.

Khi đó, T có điểm bất động.

Chứng minh. Xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_{n+1}=Tx_n$ với mọi $n\ge0$, trong đó x_0 được xác định bởi giả thiết (3). Do T là ánh xạ đơn điệu không giảm nên $x_n\preceq x_{n+1}$ với mọi $n\ge0$. Giả sử tồn tại $n\ge0$ sao cho $x_n=x_{n+1}$. Khi đó $x_n=Tx_n$ hay x_n là điểm bất động của ánh xạ T. Bây giờ, ta giả sử $x_n\ne x_{n+1}$ với mọi $n\ge0$. Do $x_{n-1}\preceq x_n$ nên từ giả thiết (2), ta được

$$\psi(d(x_n,x_{n+1}))=\psi(d(Tx_{n-1},Tx_n))\le\psi(M(x_{n-1},x_n))-\phi(M(x_{n-1},x_n)) \tag{2.1}$$

với

$$M(x_{n-1},x_n)=\max\{d(x_{n-1},x_n),\frac{1+d(x_{n-1},Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}d(x_n,Tx_n)\}=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1})\}.$$

Giả sử tồn tại $n\ge0$ sao cho $M(x_{n-1},x_n)=d(x_n,x_{n+1})$. Khi đó, (2.1) trở thành $\psi(d(x_n,x_{n+1}))\le\psi(d(x_n,x_{n+1}))-\phi(d(x_n,x_{n+1}))$.

Suy ra $\phi(d(x_n,x_{n+1}))=0$. Sử dụng tính chất của hàm ϕ, ta có $d(x_n,x_{n+1})=0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n\ne x_{n+1}$ với mọi $n\ge0$. Do đó, $M(x_{n-1},x_n)=d(x_{n-1},x_n)$ với mọi $n\ge0$. Khi đó, (2.1) trở thành

$$\psi(d(x_n,x_{n+1}))\le\psi(d(x_{n-1},x_n))-\phi(d(x_{n-1},x_n))<\psi(d(x_{n-1},x_n)). \tag{2.2}$$

Vì ψ là hàm số đơn điệu không giảm nên từ (2.2) ta có $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ là dãy số không âm, đơn điệu không tăng. Do đó, tồn tại $r\ge0$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=r$. Khi đó, cho $n\to\infty$ trong (2.2), sử dụng tính chất liên tục của hàm ψ và ϕ, ta được $\psi(r)\le\psi(r)-\phi(r)$. Điều này dẫn đến $\phi(r)=0$ hay $r=0$. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=0. \tag{2.3}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $x_n \neq x_m$ với mọi $n \neq m$. Do $x_p \neq x_{p+1}$ với mọi $p \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $x_n \neq x_m$ với mọi $m > n+1$. Giả sử ngược lại, tồn tại n, m mà $m > n+1 \geq 1$ sao cho $x_n = x_m$. Do $x_{m-1} \preceq x_m$ nên từ giả thiết (2), ta được

$$\begin{aligned}\psi(d(x_n, x_{n+1})) &= \psi(d(x_n, Tx_n)) = \psi(d(x_m, Tx_m)) \\ &= \psi(d(Tx_{m-1}, Tx_m)) \leq \psi(M(x_{m-1}, x_m)) - \phi(M(x_{m-1}, x_m))\end{aligned} \tag{2.4}$$

với

$$\begin{aligned}M(x_{m-1}, x_m) &= \max\{d(x_{m-1}, x_m), \frac{1 + d(x_{m-1}, Tx_{m-1})}{1 + d(x_{m-1}, x_m)} d(x_m, Tx_m)\} \\ &= \max\{d(x_{m-1}, x_m), d(x_m, x_{m+1})\}.\end{aligned}$$

Giả sử tồn tại $m > n+1$ sao cho $M(x_{m-1}, x_m) = d(x_{m-1}, x_m)$. Khi đó, (2.4) trở thành

$$\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \psi(d(x_{m-1}, x_m)) - \phi(d(x_{m-1}, x_m)) < \psi(d(x_{m-1}, x_m)).$$

Điều này mâu thuẫn với $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy số đơn điệu không tăng. Do đó, $M(x_{m-1}, x_m) = d(x_m, x_{m+1})$ với mọi $m > n+1$. Khi đó, (2.4) trở thành

$$\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \psi(d(x_m, x_{m+1})) - \phi(d(x_m, x_{m+1})) < \psi(d(x_m, x_{m+1})) = \psi(d(x_n, x_{n+1})).$$

Điều này là vô lí. Do đó, $x_n \neq x_m$ với mọi $m > n+1$. Suy ra $x_n \neq x_m$ với mọi $n \neq m$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong (X, d). Giả sử ngược lại, $\{x_n\}$ không là một dãy Cauchy trong (X, d). Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ và hai dãy con $\{x_{n(k)}\}$ và $\{x_{m(k)}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $n(k)$ là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn $n(k) > m(k) > k$ với mọi $k \geq 1$ và $d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon$. Điều này dẫn đến $d(x_{m(k)}, x_{n(k)-2}) < \varepsilon$. Mặt khác, vì $x_n \neq x_m$ với mọi $n \neq m$. nên

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-2}) + d(x_{n(k)-2}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &< \varepsilon + d(x_{n(k)-2}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.5) và sử dụng (2.3), ta được

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon. \tag{2.6}$$

Ta lại có

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \tag{2.7}$$

và

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \leq d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}). \tag{2.8}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.7) , (2.8) và sử dụng (2.3), (2.6), ta được

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \varepsilon. \tag{2.9}$$

Mặt khác, vì $x_{m(k)-1} \preceq x_{n(k)-1}$ nên từ giả thiết (2), ta được

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) &= \psi(d(Tx_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1})) \\ &\leq \psi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}))\end{aligned} \tag{2.10}$$

với

$$\begin{aligned}M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= \max\{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), \frac{1 + d(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1})}{1 + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})} d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1})\} \\ &= \max\{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), \frac{1 + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)})}{1 + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})} d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})\}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.11) và sử dụng (2.3), (2.9), ta được

$$\lim_{k\to\infty} M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \varepsilon. \quad (2.12)$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.10) và sử dụng (2.6), (2.12), tính liên tục của hàm ψ và ϕ, ta được $\psi(\varepsilon) \le \psi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon)$. Suy ra $\phi(\varepsilon) = 0$ hay $\varepsilon = 0$. Điều này mâu thuẫn với $\varepsilon > 0$. Do đó, $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong (X,d). Do (X,d) là không gian mêtric chữ nhật đầy đủ nên tồn tại $x \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Giả sử ánh xạ T liên tục. Khi đó $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tx$ hay x là điểm bất động của ánh xạ T.

Giả sử X thỏa mãn giả thiết (H). Do $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu không giảm và $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nên $x_n \preceq x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, từ giả thiết (2), ta được

$$\psi(d(x_{n+1}, Tx)) = \psi(d(Tx_n, Tx)) \le \psi(M(x_n, x)) - \phi(M(x_n, x)) \quad (2.13)$$

với

$$\begin{aligned} M(x_n, x) &= \max\{d(x_n, x), \frac{1 + d(x_n, Tx_n)}{1 + d(x_n, x)} d(x, Tx)\} \\ &= \max\{d(x_n, x), \frac{1 + d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x)} d(x, Tx)\}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.14) và sử dụng (2.3), $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ta được $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x) = d(x, Tx)$. Tiếp tục cho $n \to \infty$ trong (2.13) và sử dụng Bổ đề 1.5 ta được

$$\psi(d(x, Tx)) \le \psi(d(x, Tx)) - \phi(d(x, Tx)).$$

Suy ra $\phi(d(x, Tx)) = 0$. Sử dụng tính chất của hàm ϕ, ta được $d(x, Tx) = 0$ hay $Tx = x$. Do đó, x là điểm bất động của ánh xạ T. □

Ví dụ sau chứng tỏ Định lí 2.1 không cho tính duy nhất của điểm bất động.

Ví dụ 2.2. Xét $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ và mêtric chữ nhật xác định bởi:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ \frac{1}{n} & \text{nếu } x \ne y \in \{0, \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, ... \\ 1 & \text{nếu } x \ne y \in X \setminus \{0\} \end{cases}$$

Trên X xét thứ tự xác định bởi: $x \preceq y$ khi và chỉ khi $x, y \in \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n = 2, 3, ...\}$ và $x \le y$. Xét ánh xạ $T : X \to X$ như sau: $T1 = 1, T0 = T\frac{1}{n} = 0$ với $n = 2, 3, ...$ Xét hai ánh xạ $\psi(t) = t$ và $\phi(t) = \frac{t}{2}$ với $t \ge 0$. Khi đó, với $x \preceq y$ ta chỉ cần xét trường hợp $x = 0, y = \frac{1}{n}$ với $n \ge 2$ và trường hợp $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}$ với $n \ge m \ge 2$. Kiểm tra trực tiếp, ta có giả thiết (2) trong Định lí 2.1 thỏa mãn. Hơn nữa, các giả thiết khác trong Định lí 2.1 cũng thỏa mãn. Vì vậy, Định lí 2.1 áp dụng được cho ánh xạ T, không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự $(X, d, \preceq)$ và ánh xạ ψ, ϕ. Tuy nhiên, T có hai điểm bất động là 0 và 1.

Định lí sau thiết lập điều kiện đủ cho tính duy nhất điểm bất động của ánh xạ T trong Định lí 2.1.

Định lí 2.3. *Giả sử*

(1) Các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn.

(2) Với mỗi cặp $x, y \in X$, tồn tại $z \in X$ sao cho z so sánh được với x và y.

(3) Với mỗi cặp $x, y \in X$ phân biệt, tồn tại $r_{x,y} > 0$ để $r_{x,y} < d(x,z) + d(z,y)$ với mọi $z \in X$.

Khi đó, ánh xạ T có duy nhất điểm bất động.

Chứng minh. Do các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn nên T có điểm bất động. Ta chỉ cần chứng minh tính duy nhất của điểm bất động. Giả sử $x, y \in X$ là hai điểm bất động của T và $x \neq y$. Khi đó, tồn tại $z \in X$ sao cho z so sánh được với x và y.

Khi z so sánh được với x, không mất tính tổng quát, ta giả sử $z \preceq x$. Do T là ánh xạ đơn điệu không giảm nên $T^{n-1}z \preceq x$. Do đó

$$\psi(d(T^n z,x)) = \psi(d(TT^{n-1}z,Tx)) \leq \psi(M(T^{n-1}z,x)) - \phi(M(T^{n-1}z,x)) \tag{2.15}$$

với

$$M(T^{n-1}z,x) = \max\{d(T^{n-1}z,x), \frac{1+d(T^{n-1}z,T^n z)}{1+d(T^{n-1}z,x)} d(x,Tx)\} = d(T^{n-1}z,x).$$

Khi đó, (2.15) trở thành

$$\psi(d(T^n z,x)) \leq \psi(d(T^{n-1}z,x)) - \phi(d(T^{n-1}z,x)) \leq \psi(d(T^{n-1}z,x)). \tag{2.16}$$

Do ψ đơn điệu không giảm nên $d(T^n z,x) \leq d(T^{n-1}z,x)$ hay dãy $\{d(T^n z,x)\}$ đơn điệu không tăng. Do đó, tồn tại $\delta \geq 0$ sao cho $\lim_{n\to\infty} d(T^n z,x) = \delta$. Khi đó, cho $n \to \infty$ trong (2.16), ta được $\psi(\delta) \leq \psi(\delta) - \phi(\delta)$. Suy ra $\phi(\delta) = 0$ hay $\delta = 0$. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n z,x) = 0. \tag{2.17}$$

Khi z so sánh được với y, bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta được

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n z,y) = 0. \tag{2.18}$$

Mặt khác, từ giả thiết (3) ta suy ra tồn tại $r_{x,y} > 0$ để $r_{x,y} < d(x,T^n z) + d(T^n z,y)$. (2.19)

Cho $n \to \infty$ trong (2.19) và sử dụng (2.17), (2.18) ta được $r_{x,y} = 0$. Điều này là một mâu thuẫn. Do đó, $x = y$. Vậy T có điểm bất động duy nhất.

Bằng cách chọn $\psi(t) = t$ và $\phi(t) = (1-k)t$ với $t \geq 0$ và $k \in (0,1)$, từ Định lí 2.1 và Định lí 2.3, ta nhận được hai hệ quả sau.

Hệ quả 2.4. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn*

(1) T là ánh xạ đơn điệu không giảm.

(2) Tồn tại $k \in (0,1)$ sao cho

$$d(Tx,Ty) \leq k \max\{d(x,y), \frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)} d(y,Ty)\}$$

với mọi $x,y \in X$ mà $x \preceq y$.

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq Tx_0$.

(4) T là ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu không giảm và $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó, T có điểm bất động.

Hệ quả 2.5. *Giả sử*

(1) Các giả thiết của Hệ quả 2.4 được thỏa mãn.

(2) Với mỗi cặp $x,y \in X$, tồn tại $z \in X$ sao cho z so sánh được với x và y.

(3) Với mỗi cặp $x,y \in X$ phân biệt, tồn tại $r_{x,y} > 0$ để $r_{x,y} < d(x,z) + d(z,y)$ với mọi $z \in X$.

Khi đó, ánh xạ T có duy nhất điểm bất động.

Vì mỗi mêtric là một mêtric chữ nhật nên từ Định lí 2.1, Định lí 2.2, Hệ quả 2.4 và Hệ quả 2.5, ta lần lượt nhận được bốn hệ quả sau. Các hệ quả này là sự tổng quát của các kết quả chính trong [4] sang không gian mêtric sắp thứ tự.

Hệ quả 2.6. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian mêtric sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn*

(1) T là ánh xạ đơn điệu không giảm.

(2) Tồn tại hàm $\psi \in \Psi$, hàm $\phi \in \Phi$ sao cho $\psi(d(Tx,Ty)) \leq \psi(M(x,y)) - \phi(M(x,y))$ với mọi $x,y \in X$ mà $x \preceq y$, trong đó

$$M(x,y) = \max\{d(x,y), \frac{1+d(x,Tx)}{1+d(x,y)} d(y,Ty)\}.$$

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq Tx_0$.

(4) T là ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu không giảm và $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \geq 0$.

Khi đó, T có điểm bất động.

Hệ quả 2.7. *Giả sử*

(1) Các giả thiết của Hệ quả 2.6 được thỏa mãn.

(2) Với mỗi cặp $x, y \in X$, tồn tại $z \in X$ sao cho z so sánh được với x và y.

Khi đó, ánh xạ T có duy nhất điểm bất động.

Hệ quả 2.8. *Cho $(X, d, \preceq)$ là một không gian mêtric sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ $T : X \to X$ thỏa mãn*

(1) T là ánh xạ đơn điệu không giảm.

(2) Tồn tại $k \in (0,1)$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), \frac{1 + d(x, Tx)}{1 + d(x, y)} d(y, Ty)\}$$

với mọi $x, y \in X$ mà $x \preceq y$.

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq Tx_0$.

(4) T là ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu không giảm và $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \geq 0$.

Khi đó, T có điểm bất động.

Hệ quả 2.9. *Giả sử*

(1) Các giả thiết của Hệ quả 2.8 được thỏa mãn.

(2) Với mỗi cặp $x, y \in X$, tồn tại $z \in X$ sao cho z so sánh được với x và y.

Khi đó, ánh xạ T có duy nhất điểm bất động.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Ví dụ này là một minh họa cho sự tồn tại điểm bất động của Định lí 2.1, đồng thời ví dụ này cũng chứng tỏ Định lí 2.1 tổng quát hơn Định lí 1.3 và [4, Theorem 2.1].

Ví dụ 2.10. Xét $X = \{1, 2, 3, 4\}$ và mêtric chữ nhật d trên X xác định bởi:

$$d(1,1) = d(2,2) = d(3,3) = d(4,4) = 0,$$
$$d(1,2) = d(2,1) = 3, d(2,3) = d(3,2) = d(1,3) = d(3,1) = 1,$$
$$d(1,4) = d(4,1) = d(2,4) = d(4,2) = d(3,4) = d(4,3) = 4.$$

Xét ánh xạ $T : X \to X$ xác định bởi $T1 = T2 = 1, T3 = 2, T4 = 3$. Khi đó, chọn $x = 2$ và $y = 3$, ta có $d(T2, T3) = d(1,2) = 3$ và $M(2,3) = \max\{d(2,3), \frac{1 + d(2,T1)}{1 + d(2,3)} d(3,T3)\} = 2.$

Do đó, nếu điều kiện (1.1) trong Định lí 1.3 thỏa mãn thì ta phải có $\psi(3) \leq \psi(2) - \phi(2)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của hàm ψ và ϕ. Do đó, Định lí 1.3 không áp dụng được cho ánh xạ T và không gian mêtric chữ nhật (X, d).

Hơn nữa, vì $3 = d(1,2) > d(1,3) + d(3,2) = 1 + 1 = 2$ nên d không là một mêtric trên X. Do đó, [4, Theorem 2.1] không áp dụng được cho ánh xạ T và (X, d).

Bây giờ, ta xét thứ tự $\preceq$ trên X xác định bởi: $x \preceq y$ nếu $x \leq y$ và $x, y \in \{1, 2, 4\}$. Khi đó, $(X, d, \preceq)$ là một mêtric chữ nhật sắp thứ tự, đầy đủ. Xét hàm $\psi \in \Psi$ và hàm $\phi \in \Phi$ xác định bởi $\psi(t) = t$ và $\phi(t) = \frac{t}{2}$ với mọi $t \geq 0$. Khi đó, với $x, y \in X, x \preceq y$ ta chỉ cần xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $x = 1, y = 2$. Khi đó

$$d(T1, T2) = d(1,1) = 0 \leq \frac{1}{2} M(1,2) = \psi(M(1,2)) - \phi(M(1,2)).$$

Trường hợp 2: $x = 1, y = 4$. Khi đó

$$d(T1, T4) = d(1,3) = 1 \leq 2 = \frac{1}{2} M(1,4) = \psi(M(1,4)) - \phi(M(1,4)).$$

Trường hợp 3: $x = 2, y = 4$. Khi đó

$$d(T2, T4) = d(1,3) = 1 \leq 2 = \frac{1}{2} M(2,4) = \psi(M(2,4)) - \phi(M(2,4)).$$

Do đó, giả thiết (2) trong Định lí 2.1 thỏa mãn. Hơn nữa, các giả thiết khác trong Định lí 2.1 cũng thỏa mãn. Vì vậy, Định lí 2.1 áp dụng được cho ánh xạ T, không gian mêtric chữ nhật sắp thứ tự $(X, d, \preceq)$ và hai hàm ψ, ϕ.

Tài liệu tham khảo

[1]. H. Aydi, E. Karapinar, and H. Lakzian (2012), "Fixed point results on a class of generalized metric spaces", *Math. Sci.*, (6:46), 6 pages.

[2]. H. Aydi, E. Karapinar, and B. Samet (2014), "Fixed points for generalized (α,ψ)-contractions on generalized metric spaces", *J. Inequal. Appl.*, (2014:229), 16 pages.

[3]. A. Branciari (2000), "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces", *Publ. Math. Debrecen*, (57), p.31-37.

[4]. N. V. Can and N. X. Thuan (2013), "Fixed point theorem for generalized weak contractions involving rational expressions", *Open J. Math. Modeling*, 1(2), p.29-33.

[5]. S. Chandok, B. S. Choudhury, and N. Metiya (2014), "Fixed point results in ordered metric spaces for rational type expressions with auxiliary functions", *J. Egyptian Math. Soc.*, 7 pages, in press.

[6]. I. Cabrera, J. Harjani, and K. Sadarangani (2013), "A fixed point theorem for contractions of rational type in partially ordered metric spaces", *Ann. Univ. Ferrara*, (59), p.251-258.

[7]. B. K. Dass and S. Gupta (1975), "A extension of Banach contraction principle through rational expression", *Indian J. Pure Appl. Math.*, 6 (12), p.1455-1458.

[8]. I. M Erhan, E. Karapinar, and T. Sekulic (2012), "Fixed points of (ψ,ϕ) contractions on rectangular metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2012:138), 12 pages.

[9]. W. Kirk and N. Shahzad (2013), "Generalized metrics and Caristi's theorem", *Fixed Point Theory Appl.*, (2013:129), 9 pages.

[10]. R. P. Pathak, R. Tiwari, and R. Bhardwaj (2014), "Fixed point theorems through rational expression in altering distance functions", *Math. Theory Modeling*, 4 (7), p.78-83.

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR CONTRACTIONS OF RATIONAL TYPE IN PARTIALLY ORDERED RECTANGULAR METRIC SPACES

Summary

In this paper, we establish and prove some fixed point theorems for the contraction of rational type in ordered rectangular metric spaces. The obtained results are the generalizations of those in [4], [8]. Also, relevant examples are provided for illustration.

Keywords: fixed point, the contraction of rational type, partially ordered rectangular metric spaces.