PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐƯỜNG THẲNG TIẾP TUYẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

• CN. Phạm Trọng Thư(*)

Tóm tắt

Bài viết giới thiệu phương pháp sử dụng đường thẳng tiếp tuyến trong chứng minh bất đẳng thức và các ví dụ minh họa tiêu biểu.

Từ khóa: Đường thẳng tiếp tuyến, bất đẳng thức.

1. Mở đầu

Bất đẳng thức (BĐT) là một bộ phận của Toán học và ngày càng được chú trọng nhờ nó bao hàm nhiều sáng tạo và suy luận. Trong các đề thi tuyển sinh vào đại học cũng như đề thi Olympic trong nước và quốc tế của những năm gần đây thường có bài chứng minh BĐT hay các vấn đề liên quan. Đây là loại toán khó có nhiều dạng và nhiều phương pháp giải, chẳng hạn phương pháp sử dụng các BĐT quen thuộc, phương pháp cực trị,... Đối với các bài toán BĐT đưa được về dạng tổng hàm với hàm số có đạo hàm trên khoảng K, việc sử dụng các tri thức về tiếp tuyến để chứng minh BĐT là một hướng thuận lợi tìm ra lời giải của loại toán này. Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu nội dung của phương pháp sử dụng đường thẳng tiếp tuyến chứng minh BĐT để bạn đọc tham khảo.

2. Sử dụng đường thẳng tiếp tuyến trong chứng minh bất đẳng thức

Đối với một đường cong cho bởi hàm số $y = f(x)$, tiếp tuyến tại một số điểm nào đó của đồ thị hàm số luôn nằm trên hay nằm dưới đồ thị hàm số. Dựa vào tính chất này, người ta thiết lập nên một phương pháp thú vị để chứng minh bất đẳng thức, đó là phương pháp tiếp tuyến.

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên khoảng K, liên tục và có đạo hàm trên K. Khi đó, nếu tiếp tuyến tại một điểm $M(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in K$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (1)$$

luôn nằm trên (hoặc luôn nằm dưới) đồ thị hàm số f thì ta luôn có

$$f(x) \le f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (2)$$

hoặc $f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. (3)

Từ nhận xét trên, ta thấy với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ thì

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \le f'(x_0)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nx_0) + nf(x_0) \qquad (4)$$

hoặc $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \ge f'(x_0)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nx_0) + nf(x_0)$. (5)

Như vậy, nếu một bất đẳng thức có dạng "tổng hàm" như vế trái (VT) của bất đẳng thức (4) (hoặc (5)), và có giả thiết $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nx_0$ với đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_0$ thì ta nghĩ ngay có thể chứng minh (4) (hoặc (5)) bằng phương pháp tiếp tuyến, chẳng hạn để chứng minh bất đẳng thức (2) thì việc đầu tiên là ta tiến hành tìm phương trình tiếp tuyến (1) tại điểm $x_0 \in K$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, rồi sau đó tiến hành kiểm chứng bất đẳng thức $f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right) \le 0$ luôn đúng trên một miền K nào đó.

Sau đây chúng ta xét các bài toán qua các ví dụ tiêu biểu.

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2}\right) \ge \frac{9}{4} \quad (1)$$

(*) Trường Trung học phổ thông chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.

Lời giải

Không mất tính tổng quát nên bằng kĩ thuật chuẩn hóa kết hợp với phương pháp hệ số bất định (tên tiếng Anh là *Undefined Coefficient Technique*) ta chuẩn hóa $a+b+c=3$.

BĐT (1) trở thành

$$\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2}\geq\frac{3}{4}$$

hay $f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{4}$ (*)

trong đó hàm số đặc trưng là

$$f(x)=\frac{x}{(3-x)^2},\ x\in(0;\ 3).$$

Đẳng thức (*) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(3-x)^2}$ có $f'(x)=\dfrac{-x^2+9}{(3-x)^4}$

Như vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm $M(1; f(1))$ là

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{4}\text{ hay } y=\frac{2x-1}{4}.$$

Ta có:

$$f(x)-\left(\frac{2x-1}{4}\right)=\frac{-2x^3+13x^2-20x+9}{4(3-x)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(9-2x)}{4(3-x)^2}\geq 0,\ \forall x\in(0;\ 3).$$

Suy ra $f(x)\geq\dfrac{2x-1}{4},\ \forall x\in(0;\ 3)$.

Từ đó với mọi $a,\ b,\ c\in(0;\ 3)$ thì

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{2(a+b+c)-3.1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Lưu ý.

• *Tại sao trong Ví dụ 1 ta chuẩn hóa được* $a+b+c=3$.

+ Ta chỉ có thể chuẩn hoá khi hai vế của BĐT cần chứng minh là đồng bậc và thuần nhất nhằm để triệt tiêu đi số "$t\neq 0$".

+ Trong Ví dụ 1 ta thấy hai vế của BĐT (1) là đồng bậc 0 và thuần nhất, cho nên khi ta thay bộ $(a,\ b,\ c)$ bằng bộ $(ta,\ tb,\ tc)$ thì BĐT cần chứng minh vẫn không đổi.

Thật vậy khi đó

$$\text{VT}(1)=(ta+tb+tc)\left(\frac{ta}{(tb+tc)^2}+\frac{tb}{(tc+ta)^2}+\frac{tc}{(ta+tb)^2}\right)$$

$$=t(a+b+c)\left(\frac{ta}{t^2(b+c)^2}+\frac{tb}{t^2(c+a)^2}+\frac{tc}{t^2(a+b)^2}\right)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right)$$

Vậy nếu BĐT đúng với bộ $(ta,\ tb,\ tc)$ thì đúng với bộ $(a,\ b,\ c)$. Nên ta có quyền chọn $t=\dfrac{1}{a+b+c}$ khi đó chứng minh BĐT với bộ $\left(\dfrac{a}{a+b+c},\ \dfrac{b}{a+b+c},\ \dfrac{c}{a+b+c}\right)$ hay là bộ $(a,\ b,\ c)$ mang tính chất $a+b+c=3$.

• *Để hiểu rõ hơn vấn đề chuẩn hóa trước hết ta cần nhớ lại*

+ Đa thức $f(a,\ b,\ c)$ đối xứng $\Leftrightarrow f(a,\ b,\ c)=f(b,\ c,\ a)=f(c,\ a,\ b)$.

+ Đa thức $f(a,\ b,\ c)$ thuần nhất trên miền $D\Leftrightarrow f(ta,\ tb,\ tc)=t^n f(a,\ b,\ c)$

$$\forall t,\ a,\ b,\ c\in D,\ t\neq 0,\ n=const.$$

Hiểu một cách đơn giản do tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt

$$abc=r,\ ab+bc+ca=s,\ a^n+b^n+c^n=t...$$

Ví dụ 2. [4, tr. 119]

Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}\quad(2)$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$.

BĐT (2) trở thành

$$\frac{a(3-a)}{(3-a)^2+a^2}+\frac{b(3-b)}{(3-b)^2+b^2}+\frac{c(3-c)}{(3-c)^2+c^2}\le\frac{6}{5}$$

hay $f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{6}{5}$ (*)

trong đó hàm số đặc trưng là

$$f(x)=\frac{x(3-x)}{(3-x)^2+x^2},\ x\in(0;\ 3).$$

Đẳng thức trong (*) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Hàm số $f(x)=\frac{x(3-x)}{(3-x)^2+x^2}$ có

$$f'(x)=\frac{-18x+27}{(2x^2-6x+9)^2}$$

Như vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm $M(1;f(1))$ là

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{9}{25}(x-1)+\frac{2}{5}\text{ hay } y=\frac{9x+1}{25}\cdot$$

Khi đó $\forall x\in(0;\ 3)$ ta có:

$$f(x)-\left(\frac{9x+1}{25}\right)=\frac{-18x^3+27x^2-9}{25\left((3-x)^2+x^2\right)}$$

$$=\frac{-(x-1)^2(18x+9)}{25\left((3-x)^2+x^2\right)}\le 0.$$

Suy ra $f(x)\le\frac{9x+1}{25},\ \forall x\in(0;\ 3).$

Từ đó $\forall a,\ b,\ c\in(0;\ 3)$ thì

$$f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{9(a+b+c)+3.1}{25}=\frac{6}{5}.$$

Vậy BĐT (2) được chứng minh. Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3. Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+bc+ca)\ge(a+b+c)^2 \quad (3)$$

Lời giải

Ta có

$$(3)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a^2}-a^2\right)+\left(\frac{1}{b^2}-b^2\right)+\left(\frac{1}{c^2}-c^2\right)\ge 0 \quad (*)$$

• Do $a,\ b,\ c>0$ nên $a^2+b^2+c^2<(a+b+c)^2=9$. Từ đó nếu có một trong ba số $a,\ b,\ c$ nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Giả sử $a<\frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>9>a^2+b^2+c^2$ nên BĐT (*) đã được chứng minh.

• Xét $a,\ b,\ c\ge\frac{1}{3}$ và kết hợp với $a+b+c=3$ ta suy ra $a,\ b,\ c\in\left[\frac{1}{3};\ \frac{7}{3}\right]\cdot$

• Xét hàm số đặc trưng $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ trên $\left[\frac{1}{3};\ \frac{7}{3}\right]$, có $f'(x)=-\frac{2}{x^3}-2x$

Như vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm $M(1;f(1))$ là

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-4(x-1)+0\text{ hay } y=-4x+4\cdot$$

Khi đó $\forall x\in\left[\frac{1}{3};\ \frac{7}{3}\right]$ ta có:

$$f(x)-(-4x+4)=\frac{-x^4+4x^3-4x^2+1}{x^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2\left(2-(x-1)^2\right)}{x^2}\ge 0.$$

Suy ra $f(x)\ge -4x+4,\ \forall x\in\left[\frac{1}{3};\ \frac{7}{3}\right].$

Từ đó ta có

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge -4(a+b+c)+12=0.$$

Vậy BĐT (3) được chứng minh. Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4. [2, tr. 829] Giả sử $a,\ b,\ c,\ d$ là các số thực dương sao cho $a+b+c+d=1$.

Chứng minh rằng

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8} \quad (4)$$

Lời giải

$$(4)\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\ge\frac{1}{8},\ \forall a,\ b,\ c,\ d\in(0;\ 1)$$

trong đó hàm số đặc trưng là $f(x)=6x^3-x^2,\ x\in(0;\ 1).$

Đẳng thức trong (4) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}\cdot$

Hàm số $f(x)=6x^3-x^2$ có $f'(x)=18x^2-2x$

Như vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{4};f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ là

$$y=f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{32}\text{ hay }$$

$$y=\frac{5x-1}{8}\cdot$$

Khi đó $\forall x \in (0;\ 1)$ ta có

$$f(x) - \left(\frac{5x-1}{8}\right) = \frac{1}{8}(48x^3 - 8x^2 - 5x + 1)$$

$$= \frac{1}{8}(4x-1)^2(3x+1) \geq 0.$$

Suy ra $f(x) \geq \frac{5x-1}{8},\ \forall x \in (0;\ 1).$

Từ đó $\forall a,\ b,\ c,\ d \in (0;\ 1)$ thì

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5(a+b+c+d)-4}{8} = \frac{1}{8}.$$

Vậy BĐT (4) được chứng minh. Đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}\cdot$

Ví dụ 5. [1, tr. 207] Cho $a,\ b,\ c > 0.$

Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5} \quad (5)$$

Lời giải

Đặt $m = a+b+c;\ a_1 = \frac{a}{m};\ b_1 = \frac{b}{m};\ c_1 = \frac{c}{m} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$$(5) \Leftrightarrow \frac{(b_1+c_1-a_1)^2}{(b_1+c_1)^2+a_1^2} + \frac{(c_1+a_1-b_1)^2}{(c_1+a_1)^2+b_1^2} + \frac{(a_1+b_1-c_1)^2}{(a_1+b_1)^2+c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2a_1)^2}{(1-a_1)^2+a_1^2} + \frac{(1-2b_1)^2}{(1-b_1)^2+b_1^2} + \frac{(1-2c_1)^2}{(1-c_1)^2+c_1^2} \geq \frac{3}{5} \text{ hay } f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) \geq \frac{3}{5} \ (*)$$

trong đó hàm số đặc trưng là $f(x) = \frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2+x^2},\ x \in (0;\ 1).$

Đẳng thức (*) xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}\cdot$

Hàm số $f(x) = \frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2+x^2}$ có

$$f'(x) = \frac{4x-2}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

Như vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ là

$$y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{54}{25}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}$$

hay $y = \frac{23-54x}{25}\cdot$

Khi đó $\forall x \in (0;\ 1)$ ta có:

$$f(x) - \left(\frac{23-54x}{25}\right) = \frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25\left((1-x)^2+x^2\right)} \geq 0.$$

Suy ra $f(x) \geq \frac{23-54x}{25},\ \forall x \in (0;\ 1).$

Từ đó $\forall a_1,\ b_1,\ c_1 \in (0;\ 1)$ thì

$$f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) \geq \frac{69 - 54(a_1+b_1+c_1)}{25} = \frac{3}{5}.$$

Vậy BĐT (5) được chứng minh. Đẳng thức ở (5) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c.$

Ví dụ 6. Giả sử $a,\ b,\ c$ là các số thực sao cho $a+b+c = 1.$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+(1-b-c)^2} + \frac{b}{1+(1-c-a)^2} + \frac{c}{1+(1-a-b)^2} \leq \frac{9}{10} \quad (6)$$

Lời giải

$$(6) \Leftrightarrow \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}$$

hay $f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}$

trong đó hàm số đặc trưng là $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Hàm số $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ với $x \in \mathbb{R},$ có

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng 1. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-3		-1		$-\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{10}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{3}{10}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{5}$	$\searrow$	0

Trường hợp 1. Giả sử tồn tại một số $a \in (-\infty;\ -3] \Rightarrow b + c \geq 4$ nên trong hai số b, c này chắc chắn có một số lớn hơn bằng 2, chẳng hạn $b \geq 2.$ Từ đó suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) < 0 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}.$$

Trường hợp 2. Giả sử tồn tại một số $a \in \left(-3;\ -\frac{1}{3}\right]$. Khi đó

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq -\frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}.$$

Trường hợp 3. Các số $a,\ b,\ c \in \left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Ta thấy đẳng thức trong (6) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Như vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ là

$$y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{18}{25}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{10}$$ hay

$$y = \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}.$$

Khi đó $\forall x \in \left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ ta có:

$$f(x) - \left(\frac{18}{25}x + \frac{3}{50}\right) = -\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(1+x^2)} \leq 0.$$

Suy ra $f(x) \leq \frac{18}{25}x + \frac{3}{50},\ \forall x \in \left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Từ đó $\forall a,\ b,\ c \in \left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ thì

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{18}{25}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{10}.$$

Cả ba trường hợp ta suy ra BĐT (6) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

1. Cho $a,\ b,\ c > 0.$ Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a+b+c+d = 4.$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$

3. Cho $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 3.$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \leq 1.$$

4. Cho $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 3.$ Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 2(a+b+c)^2 \geq 15 + 4(ab+bc+ca).$$

5. [2, tr. 830] Cho $a,\ b,\ c > 0.$ Chứng minh rằng $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$

6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\geq\frac{1}{2}.$$

7. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$(a^2+b^2+c^2)^2=3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1.$

3. Kết luận

Để chứng minh bất đẳng thức có rất nhiều phương pháp. Việc sử dụng phương pháp đường tiếp tuyến là một hướng tiếp cận khá mới. Bài viết này, chúng tôi muốn thông qua một số ví dụ tiêu biểu để các bạn đọc có điều kiện tìm hiểu về phương pháp. Tất nhiên mỗi bài tập khác nhau đều cần các thủ thuật khác nhau trước khi sử dụng được phương pháp. Bạn đọc có thể thử sức với 7 bài tập trong bài viết để tìm ra những ứng dụng thú vị của phương pháp đường tiếp tuyến.

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn Văn Nho (2007), *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Trung Quốc*, NXB Giáo dục.

[2]. Trần Phương (2009), *Những viên kim cương trong bất đẳng thức Toán học*, NXB Tri Thức.

[3]. Đoàn Quỳnh (Chủ biên) (2012), *Tài liệu chuyên Toán giải tích 12*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[4]. *Tuyển tập đề thi Olympic Toán học 30 tháng 4, lần XII năm 2006*, NXB Giáo dục.

[5]. www.mathlinks.ro

[6]. www.diendantoanhoc.net

[7]. www.mathscope.org

THE METHOD OF USING THE TANGENT LINE IN PROVING THE INEQUALITIES

Summary

This paper is to introduce the method of using the tangent line in proving the inequalities and some typical examples illustrating.

Keywords: the tangent line, the inequalities.