ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO ÁNH XẠ HẦU CO-(ψ,φ) TỔNG QUÁT TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

• ThS. Nguyễn Thành Nghĩa(*), ThS. Nguyễn Trung Hiếu(**)

Tóm tắt

Trong bài báo, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát trong không gian b-mêtric sắp thứ tự bằng cách bổ sung thêm bốn số hạng $d(f^2x,fx)$, $d(f^2x,y)$, $d(f^2x,fy)$, $\dfrac{d(f^2x,x)+d(f^2x,fy)}{2s}$ và thiết lập định lí điểm bất động cho lớp ánh xạ co này. Đồng thời, chúng tôi xây dựng một số ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động, không gian b-mêtric, ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát.

1. Giới thiệu

Các mêtric suy rộng có vai trò quan trọng trong việc thiết lập những mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach. Bằng cách thay thế bất đẳng thức tam giác trong khái niệm mêtric bởi một bất đẳng thức tổng quát hơn, nhiều khái niệm mêtric suy rộng đã được giới thiệu như 2-mêtric, G-mêtric, S-mêtric, mêtric chữ nhật. Với kĩ thuật tương tự, năm 1989, Bakhtin [2] đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng là b-mêtric. Khái niệm này tiếp tục được Czerwik [5], [6] nghiên cứu và hoàn chỉnh. Gần đây, việc thiết lập những định lí điểm bất động trên không gian b-mêtric cũng như việc mở rộng những định lí điểm bất động trong không gian mêtric sang không gian b-mêtric được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Khái niệm b-mêtric đã được giới thiệu như sau.

Định nghĩa 1.1 ([5]). Cho X là tập hợp khác rỗng và ánh xạ $d: X\times X\to[0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x,y,z\in X$ và với $s\geq 1$.

(1) $d(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

(3) $d(x,y)\leq s(d(x,z)+d(z,y))$.

Khi đó, ánh xạ d được gọi là một *b-mêtric* trên X và bộ (X,d,s) được gọi là một *không gian b-mêtric*.

(*) Văn phòng Đảng - Đoàn, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Trong những năm gần đây, việc mở rộng ánh xạ co trong Nguyên lí ánh xạ co Banach thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả. Nhiều dạng ánh xạ co suy rộng đã được thiết lập [4]. Năm 2011, Ćirić và các cộng sự [3] đã giới thiệu một dạng ánh xạ hầu co suy rộng trên không gian mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lí điểm bất động cho loại ánh xạ này. Năm 2012, Shatanawi và cộng sự [10] đã mở rộng khái niệm ánh xạ hầu co suy rộng thành ánh xạ hầu co-(ψ,φ) suy rộng trên không gian mêtric sắp thứ tự. Năm 2013, Roshan và các cộng sự [9] đã mở rộng khái niệm ánh xạ hầu co-(ψ,φ) suy rộng trên không gian mêtric sắp thứ tự trong bài báo [10] thành ánh xạ hầu co-$(\psi,\varphi)_s$ suy rộng trong không gian b-mêtric sắp thứ tự, đồng thời thiết lập một số kết quả về điểm bất động cho lớp ánh xạ này.

Cũng với mục đích mở rộng Nguyên lí ánh xạ co Banach, năm 2014, Kumam và các cộng sự [8] đã suy rộng điều kiện co kiểu Ćirić bằng cách bổ sung thêm bốn số hạng mới $d(T^2x,x)$, $d(T^2x,Tx)$, $d(T^2x,y)$, $d(T^2x,Ty)$, đồng thời thiết lập định lí điểm bất động cho điều kiện co suy rộng này.

Trong bài báo này, bằng cách bổ sung thêm bốn số hạng $d(f^2x,fx)$, $d(f^2x,y)$, $d(f^2x,fy)$, $\dfrac{d(f^2x,x)+d(f^2x,fy)}{2s}$ vào điều kiện co, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát trong không gian b-mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lí điểm bất động cho kiểu ánh xạ co này. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo này.

Định nghĩa 1.2 ([5]). Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ đến* x nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$.

(3) Không gian (X,d,s) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X,d,s) là một dãy hội tụ trong (X,d,s).

Bổ đề 1.3 ([1], Lemma 1). *Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric và hai dãy $\{x_n\},\{y_n\}$ lần lượt hội tụ đến x,y. Khi đó*

$$\frac{1}{s^2}d(x,y)\le \liminf_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\le \limsup_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\le s^2 d(x,y).$$

Đặc biệt, nếu $x=y$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$. Hơn nữa, với mọi $z\in X$, ta có

$$\frac{1}{s}d(x,z)\le \liminf_{n\to\infty} d(x_n,z)\le \limsup_{n\to\infty} d(x_n,z)\le s d(x,z).$$

Định nghĩa 1.4 ([7]). Hàm $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ được gọi là *hàm biến thiên khoảng cách* nếu φ thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) φ là hàm liên tục không giảm;

(2) $\varphi(t)=0$ nếu và chỉ nếu $t=0$.

2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát trên không gian b-mêtric sắp thứ tự.

Định nghĩa 2.1. Cho $(X,d,s,\preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự và ánh xạ $f:X\to X$. Khi đó, ánh xạ f được gọi là *ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát* nếu tồn tại hằng số $L\ge 0$ và hai hàm biến thiên khoảng cách ψ,φ sao cho

$$\psi(s^2 d(fx,fy))\le \psi(K_s(x,y))-\varphi(K_s(x,y))+L\psi(N(x,y)) \quad (2.1)$$

với mọi $x,y\in X$ mà $x\preceq y$, trong đó

$$K_s(x,y)=\max\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),\frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2s},$$
$$\frac{d(f^2x,x)+d(f^2x,fy)}{2s},d(f^2x,fx),d(f^2x,y),d(f^2x,fy)\},$$
$$N(x,y)=\min\{d(x,fx),d(x,fy),d(y,fx)\}.$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ cho sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát trên không gian b-mêtric sắp thứ tự.

Định lí 2.2. *Cho $(X,d,s,\preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ không giảm $f:X\to X$ thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) f là một ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát.

(2) f là một ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là một dãy không giảm trong X và hội tụ về x thì $x_n\preceq x$ với mọi $n\ge 0$.

(3) Tồn tại $x_0\in X$ sao cho $x_0\preceq fx_0$.

Khi đó, f có điểm bất động trong X.

Chứng minh. Với $x_0\in X$ thỏa mãn giả thiết (3), ta xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_{n+1}=fx_n$ với mọi $n\ge 0$. Vì $x_0\preceq fx_0$ và f là ánh xạ không giảm nên bằng qui nạp ta chứng minh được $x_n\preceq x_{n+1}$ với mọi $n\ge 0$.

Nếu tồn tại $k\ge 0$ sao cho $x_{k+1}=x_k$ hay $fx_k=x_k$ thì x_k là điểm bất động của f. Giả sử rằng $x_n\ne x_{n+1}$ với mọi $n\ge 0$. Ta chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0. \quad (2.2)$$

Thật vậy, vì f là ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát nên

$$\psi(d(x_n,x_{n+1}))\le \psi(s^2 d(x_n,x_{n+1}))=\psi(s^2 d(fx_{n-1},fx_n))$$
$$\le \psi(K_s(x_{n-1},x_n))-\varphi(K_s(x_{n-1},x_n))+L\psi(N(x_{n-1},x_n)), \quad (2.3)$$

trong đó

$$K_s(x_{n-1},x_n)=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},fx_{n-1}),d(x_n,fx_n),\frac{d(x_{n-1},fx_n)+d(x_n,fx_{n-1})}{2s},$$
$$\frac{d(f^2x_{n-1},x_{n-1})+d(f^2x_{n-1},fx_n)}{2s},d(f^2x_{n-1},fx_{n-1}),d(f^2x_{n-1},x_n),d(f^2x_{n-1},fx_n)\}$$
$$=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),\frac{d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_n)}{2s},$$
$$\frac{d(x_{n+1},x_{n-1})+d(x_{n+1},x_{n+1})}{2s},d(x_{n+1},x_n),d(x_{n+1},x_n),d(x_{n+1},x_{n+1})\}$$
$$=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),\frac{d(x_{n-1},x_{n+1})}{2s}\}$$
$$=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),\frac{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})}{2}\}$$
$$=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1})\},$$
$$N(x_{n-1},x_n)=\min\{d(x_{n-1},fx_{n-1}),d(x_{n-1},fx_n),d(x_n,fx_{n-1})\}$$
$$=\min\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},x_{n+1}),0\}=0.$$

Giả sử tồn tại $n\ge 1$ sao cho $K_s(x_{n-1},x_n)=\max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1})\right\}=d(x_n,x_{n+1})$. Khi đó (2.3) trở thành $\psi(d(x_n,x_{n+1}))\le\psi(d(x_n,x_{n+1}))-\varphi(d(x_n,x_{n+1}))<\psi(d(x_n,x_{n+1}))$. Điều này là vô lí. Do đó, $K_s(x_{n-1},x_n)=d(x_{n-1},x_n)$ với mọi $n\ge 1$. Khi đó, (2.3) trở thành

$$\psi(d(x_n,x_{n+1}))\le\psi(d(x_{n-1},x_n))-\varphi(d(x_{n-1},x_n))<\psi(d(x_{n-1},x_n)) \quad (2.4)$$

với mọi $n\ge 1$. Vì ψ là hàm không giảm nên $d(x_n,x_{n+1})\le d(x_{n-1},x_n)$ với mọi $n\ge 1$ hay dãy $\left\{d(x_n,x_{n+1})\right\}$ là dãy không tăng của các số thực không âm. Do đó, tồn tại $r\ge 0$ sao cho $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=r$. Khi đó, cho $n\to\infty$ trong (2.4), ta được $\psi(r)\le\psi(r)-\varphi(r)$. Suy ra $\varphi(r)=0$ hay $r=0$. Vì vậy $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=0$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Giả sử $\{x_n\}$ không là một dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\varepsilon>0$ và hai dãy con $\{x_{m(k)}\}$ và $\{x_{n(k)}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $n(k)$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $n(k)>m(k)\ge k$ và

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)})\ge\varepsilon. \quad (2.5)$$

Do đó

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)-1})<\varepsilon. \quad (2.6)$$

Từ (2.5), ta có

$$\varepsilon\le d(x_{m(k)},x_{n(k)})\le sd(x_{m(k)},x_{m(k)-1})+sd(x_{m(k)-1},x_{n(k)})$$
$$\le sd(x_{m(k)},x_{m(k)-1})+s^2d(x_{m(k)-1},x_{n(k)-1})+s^2d(x_{n(k)-1},x_{n(k)}). \quad (2.7)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.7) và sử dụng (2.2), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s^2}\le\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)-1}). \quad (2.8)$$

Ta lại có

$$d(x_{m(k)-1},x_{n(k)-1})\le sd(x_{m(k)-1},x_{m(k)})+sd(x_{m(k)},x_{n(k)-1}). \quad (2.9)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.9) và sử dụng (2.2), ta được

$$\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)-1})\le s\varepsilon. \quad (2.10)$$

Từ (2.8) và (2.10), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s^2}\le\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)-1})\le s\varepsilon. \quad (2.11)$$

Tương tự, từ (2.5), ta có

$$\varepsilon\le d(x_{m(k)},x_{n(k)})\le sd(x_{m(k)},x_{m(k)-1})+sd(x_{m(k)-1},x_{n(k)})$$
$$\le sd(x_{m(k)},x_{m(k)-1})+s^2d(x_{m(k)-1},x_{n(k)-1})+s^2d(x_{n(k)-1},x_{n(k)}). \quad (2.12)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.12) và sử dụng (2.2), (2.11), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s}\le\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\le s^2\varepsilon. \quad (2.13)$$

Ta lại có

$$\varepsilon\le d(x_{m(k)},x_{n(k)})$$
$$\le sd(x_{m(k)},x_{n(k)-1})+sd(x_{n(k)-1},x_{n(k)}). \quad (2.14)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.14) và sử sụng (2.2), (2.6), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s}\le\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)-1})\le\varepsilon. \quad (2.15)$$

Lập luận tương tự như trên, ta chứng minh được

$$\frac{\varepsilon}{s}\le\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})\le s^2\varepsilon, \quad (2.16)$$

$$\frac{\varepsilon}{s^2}\le\limsup_{k\to\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)-1})\le s\varepsilon. \quad (2.17)$$

Vì f là ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát và $x_{m(k)-1}\preceq x_{n(k)-1}$ nên

$$\psi(s^2d(x_{m(k)},x_{n(k)}))=\psi(s^2d(fx_{m(k)-1},fx_{n(k)-1}))$$

$$\leq \psi(K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \varphi(K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) + L\psi(N(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) \quad (2.18)$$

với $K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})$

$$= \max\{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)-1}, fx_{m(k)-1}), d(x_{n(k)-1}, fx_{n(k)-1}), \frac{d(x_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1}) + d(fx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})}{2s},$$
$$\frac{d(f^2x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + d(f^2x_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})}{2s},$$
$$d(f^2x_{m(k)-1}, fx_{m(k)-1}), d(f^2x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), d(f^2x_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})\}$$
$$= \max\{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}),$$
$$\frac{d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})}{2s}, \frac{d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)})}{2s},$$
$$d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}), d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)-1}), d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)})\} \quad (2.19)$$

và

$$N(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \min\{d(x_{m(k)-1}, fx_{m(k)-1}), d(x_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1}),$$
$$d(fx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})\} = \min\{d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}), d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}),$$
$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})\}. \quad (2.20)$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.19), (2.20) và sử dụng (2.2), (2.11), (2.13), (2.15), (2.16), (2.17), ta được

$$\frac{\varepsilon}{s^2} = \min\{\frac{\varepsilon}{s^2}, \frac{1}{2s}(\frac{\varepsilon}{s} + \frac{\varepsilon}{s})\} \leq \limsup_{k\to\infty} K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})$$
$$= \max\{\varepsilon s, 0, 0, \frac{\varepsilon s^2 + \varepsilon}{2s}, \frac{\varepsilon s}{2}, 0, \varepsilon s, \varepsilon s^2\} = \varepsilon s^2 \quad (2.21)$$

và $\limsup_{k\to\infty} N(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = 0.$ (2.22)

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \liminf_{k\to\infty} K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \leq \varepsilon s^2. \quad (2.23)$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.18) và sử dụng (2.21), (2.22), (2.23), ta được

$$\psi(s^2\varepsilon) \leq \psi(s^2 \limsup_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}))$$
$$\leq \psi(\limsup_{k\to\infty} K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \varphi(\liminf_{k\to\infty} K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) + L\psi(0)$$
$$\leq \psi(s^2\varepsilon) - \varphi(\liminf_{k\to\infty} K_s(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) < \psi(s^2\varepsilon).$$

Điều này là vô lí. Do đó, $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Do X là không gian b-mêtric đầy đủ nên tồn tại $u \in X$ để $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

Giả sử f là một ánh xạ liên tục. Khi đó, $u = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} fx_n = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = fu$. Do đó, u là điểm bất động của ánh xạ f.

Giả sử giả thiết (H) được thỏa mãn. Khi đó, $x_n \preceq u$ với mọi $n \geq 0$. Do f là một ánh xạ hầu co-(ψ, φ) tổng quát nên

$$\psi(s^2 d(x_{n+1}, fu)) = \psi(s^2 d(fx_n, fu))$$
$$\leq \psi(K_s(x_n, u)) - \varphi(K_s(x_n, u)) + L\psi(N(x_n, u)), \quad (2.24)$$

trong đó

$$K_s(x_n, u) = \max\{d(x_n, u), d(x_n, fx_n), d(u, fu), \frac{d(x_n, fu) + d(u, fx_n)}{2s},$$
$$\frac{d(f^2x_n, x_n) + d(f^2x_n, fu)}{2s}, d(f^2x_n, fx_n), d(f^2x_n, u), d(f^2x_n, fu)\}$$
$$= \max\{d(x_n, u), d(x_n, x_{n+1}), d(u, fu), \frac{d(x_n, fu) + d(u, x_{n+1})}{2s},$$
$$\frac{d(x_{n+2}, x_n) + d(x_{n+2}, fu)}{2s}, d(x_{n+2}, x_{n+1}), d(x_{n+2}, u), d(x_{n+2}, fu)\}, \quad (2.25)$$

$$N(x_n, u) = \min\{d(x_n, fx_n), d(x_n, fu), d(u, fx_n)\}$$
$$= \min\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, fu), d(u, x_{n+1})\}. \quad (2.26)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.25), (2.26) và sử dụng (2.2), $\lim_{n\to\infty} x_n = u$, Bổ đề 1.3, ta được

$$\frac{d(u, fu)}{2s^2} = \min\{\frac{d(u, fu)}{s}, \frac{d(u, fu)}{2s^2}\} \leq \limsup_{n\to\infty} K_s(x_n, u)$$
$$\leq \max\{sd(u, fu), \frac{d(u, fu)}{2}\} = sd(u, fu) \quad (2.27)$$

và $\limsup_{n\to\infty} N(x_n, u) = 0.$ (2.28)

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{d(u, fu)}{2s^2} \leq \liminf_{n\to\infty} K_s(x_n, u) \leq sd(u, fu) \quad (2.29)$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.24) và sử dụng (2.28), (2.29), Bổ đề 1.3, ta được

$$\psi(sd(u, fu)) = \psi(s^2 \frac{d(u, fu)}{s})$$
$$\leq \psi(s^2 \limsup_{n\to\infty} d(x_{n+1}, fu))$$

$$\le \psi(\limsup_{n\to\infty} K_s(x_n,u)) - \varphi(\liminf_{n\to\infty} K_s(x_n,u))$$
$$\le \psi(sd(u,fu)) - \varphi(\liminf_{n\to\infty} K_s(x_n,u)).$$

Điều này dẫn đến $\varphi(\liminf_{n\to\infty} K_s(x_n,u)) = 0$ và do đó $\liminf_{n\to\infty} \varphi(K_s(x_n,u)) = 0$. Khi đó, từ (2.29), ta suy ra $fu = u$ hay u là điểm bất động của ánh xạ f. □

Bằng cách chọn $\psi(t) = t$ và $\varphi(t) = (1-\lambda)t$ với $\lambda \in [0,1)$ và với mọi $t \ge 0$, từ Định lí 2.2, ta nhận được hệ quả sau là một sự tổng quát của [3, Theorem 2.1] sang không gian b-mêtric.

Hệ quả 2.3. *Cho $(X,d,s,\preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ không giảm $f: X \to X$ thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) Tồn tại $\lambda \in [0,1)$ và $L \ge 0$ sao cho $s^2 d(fx,fy) \le \lambda K_s(x,y) + LN(x,y)$ với mọi $x,y \in X$ mà $x \preceq y$.

(2) f là một ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là một dãy không giảm trong X và hội tụ về x thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \ge 0$.

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq fx_0$.

Khi đó, f có điểm bất động trong X.

Vì mỗi không gian mêtric (X,d) là một không gian b-mêtric $(X,d,1)$ nên từ Định lí 2.2 và Hệ quả 2.3, ta nhận được hai hệ quả sau. Trong đó, Hệ quả 2.5 là một sự tổng quát của [3, Theorem 2.1].

Hệ quả 2.4. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian mêtric sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ không giảm $f: X \to X$ thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) Tồn tại hằng số $L \ge 0$ và hai hàm biến thiên khoảng cách φ, ψ sao cho
$$\psi(d(fx,fy)) \le \psi(K_1(x,y)) - \varphi(K_1(x,y)) + L\psi(N(x,y))$$
với mọi $x,y \in X$ mà $x \preceq y$, trong đó
$$K_1(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,fx), d(y,fy), \frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2}, \frac{d(f^2x,x)+d(f^2x,fy)}{2}, d(f^2x,fx), d(f^2x,y), d(f^2x,fy)\},$$
$$N(x,y) = \min\{d(x,fx), d(x,fx), d(y,fx)\}.$$

(2) f là một ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là một dãy không giảm trong X và hội tụ về x thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \ge 0$.

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq fx_0$.

Khi đó, f có điểm bất động trong X.

Hệ quả 2.5. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian mêtric sắp thứ tự, đầy đủ và ánh xạ không giảm $f: X \to X$ thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) Tồn tại $\lambda \in [0,1)$ và $L \ge 0$ sao cho
$$d(fx,fy) \le \lambda K_1(x,y) + LN(x,y) \quad (2.30)$$
với mọi $x,y \in X$ mà $x \preceq y$.

(2) f là một ánh xạ liên tục hoặc X thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là một dãy không giảm trong X và hội tụ về x thì $x_n \preceq x$ với mọi $n \ge 0$.

(3) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq fx_0$.

Khi đó, f có điểm bất động trong X.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Ví dụ sau là một minh họa cho sự tồn tại điểm bất động của Định lí 2.2.

Ví dụ 2.6. Cho $X = \{1,2,3,4,5\}$ với thứ tự thông thường và ánh xạ $d: X \times X \to [0,\infty)$ xác định bởi
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = y \\ 1 \text{ nếu } (x,y) \in \{(1,2);(2,1);(2,3);(3,2)\} \\ 2 \text{ nếu } (x,y) \in \{(1,3);(3,1)\} \\ 12 \text{ nếu } (x,y) \in \{(1,5);(5,1);(4,1);(1,4)\} \\ 5 \text{ trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó, $(X,d,2)$ là không gian b-mêtric đầy đủ. Xét ánh xạ $f: X \to X$ xác định bởi $f1 = f2 = f3 = 1, f4 = 2, f5 = 3$. Khi đó, f là ánh xạ không giảm. Xét hai hàm biến thiên khoảng cách xác định bởi: $\psi(t) = t$ và $\varphi(t) = \dfrac{t}{5}$ với mọi $t \geq 0$. Khi đó, với $x, y \in X$ mà $x \preceq y$, ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x = y \in X$ hoặc $x = 1$, $y \in \{2,3\}$ hoặc $x = 2$, $y = 3$. Khi đó, $d(fx, fy) = 0$ và do đó điều kiện (2.1) thỏa mãn.

Trường hợp 2. $x \in \{1,2,3\}$, $y = 4$ hoặc $x = 4, y = 5$. Khi đó, $d(fx,fy) = d(1,2) = d(2,3) = 1$ và $K_2(x,y) \geq 5$. Do đó, với mọi $L \geq 0$, ta có

$$\psi(2^2 d(fx,fy)) = 4 \leq \psi(K_2(x,y)) - \varphi(K_2(x,y))$$
$$\leq \psi(K_2(x,y)) - \varphi(K_2(x,y)) + L\psi(N(x,y)).$$

Trường hợp 3. $x \in \{1,2,3\}, y = 5$. Khi đó, $d(fx, fy) = d(1,3) = 2$ và $K_2(x,y) = 12$.

Do đó, với mọi $L \geq 0$, ta có

$$\psi(2^2 d(fx,fy)) = 8 \leq \frac{48}{5} = \psi(K_2(x,y)) - \varphi(K_2(x,y))$$
$$\leq \psi(K_2(x,y)) - \varphi(K_2(x,y)) + L\psi(N(x,y)).$$

Như vậy, từ các trường hợp trên, ta suy ra điều kiện (2.1) thỏa mãn và do đó f là một ánh xạ hầu co-(ψ,φ) tổng quát trên không gian b-mêtric. Hơn nữa, các giả thiết còn lại của Định lí 2.2 cũng thỏa mãn. Do đó, Định lí 2.2 áp dụng được cho ánh xạ f, không gian b-mêtric $(X,d,2)$ và hai hàm biến thiên khoảng cách ψ,φ đã cho.

Ví dụ sau chứng tỏ rằng Hệ quả 2.5 tổng quát hơn [3, Theorem 2.1].

Ví dụ 2.7. Cho $X = \{1,2,3,4,5\}$ với thứ tự thông thường và ánh xạ $d : X \times X \to [0,\infty)$ xác định bởi

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x = y \\ 1 \text{ nếu } (x,y) \in \{(1,2);(2,1);(2,3);(3,2)\} \\ 3 \text{ nếu } (x,y) \in \{(1,5);(5,1);(4,1);(1,4)\} \\ 2 \text{ trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ta có (X,d) là không gian mêtric đầy đủ. Xét ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi $f1 = f2 = f3 = 1, f4 = 2, f5 = 3$. Ta thấy, f là ánh xạ không giảm. Giả sử f thỏa mãn điều kiện của một ánh xạ hầu co suy rộng trong [3, Theorem 2.1]. Khi đó, tồn tại $\lambda \in [0,1)$ và $L \geq 0$ sao cho

$$d(fx, fy) \leq \lambda M(x,y) + LN(x,y) \quad (2.31)$$

với mọi $x, y \in X$ mà $x \preceq y$, trong đó

$$M(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,fx), d(y,fy), \frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2}\},$$
$$N(x,y) = \min\{d(x,fx), d(x,fx), d(x,fy), d(y,fx)\}.$$

Bằng cách chọn $x = 3$ và $y = 5$, ta có $d(f3, f5) = d(1,3) = 2$, $N(3,5)=0$ và $M(3,5) = 2$. Do đó, điều kiện (2.31) trở thành $d(f3,f5) = 2 \leq 2\lambda + L\varphi(0) = 2\lambda$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\lambda \in [0,1)$. Do đó, f không là một ánh xạ hầu co suy rộng trên X. Vì vậy, [3, Theorem 2.1] không áp dụng được cho hàm f, không gian mêtric (X,d) đã cho. Bây giờ, chọn $\lambda = \dfrac{2}{3}$. Khi đó, với $x, y \in X$ mà $x \preceq y$, ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $x = y \in X$ hoặc $x = 1$, $y \in \{2,3\}$ hoặc $x = 2$, $y = 3$. Khi đó, $d(fx, fy) = 0$ và do đó điều kiện (2.30) thỏa mãn.

Trường hợp 2. $x \in \{1,2,3\}, y = 4$ hoặc $x = 4, y = 5$. Khi đó, $d(fx,fy) = d(1,2) = d(2,3) = 1$ và $K_1(x,y) \geq 2$. Do đó, với mọi $L \geq 0$, ta có

$$d(fx,fy) = 1 < \frac{4}{3} \leq \lambda K_1(x,y) \leq \lambda K_1(x,y) + LN(x,y)$$

Trường hợp 3. $x \in \{1,2,3\}, y = 5$. Khi đó, $d(fx, fy) = d(1,3) = 2$ và $K_1(x,y) = 3$. Do đó, với mọi $L \geq 0$, ta có

$$\psi(d(fx,fy)) = 2 = \lambda K_1(x,y) \leq \lambda K_1(x,y) + LN(x,y).$$

Như vậy, từ các trường hợp trên, ta suy ra điều kiện (2.30) thỏa mãn. Hơn nữa, các giả thiết còn lại của Hệ quả 2.5 cũng thỏa mãn. Do đó, Hệ quả 2.5 áp dụng được cho ánh xạ f, không gian mêtric (X,d) và hai hàm biến thiên khoảng cách ψ,φ đã cho.

Tài liệu tham khảo

[1]. A. Aghajani (2014), M. Abbas, and J. R. Roshan (2014), "Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces", *Math. Slovaca*, 64 (4), p. 941-960.

[2]. I. A. Bakhtin (1989), "The contraction principle in quasimetric spaces", *Func. An. Ulianowsk Gos. Fed. Ins.,* (30), p. 26-37.

[3]. L. B. Ćirić M. Abbas, R. Saadati, and N. Hussain (2011), "Common fixed points of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces", *Appl. Math. Comput.,* (217), p. 5784-5789.

[4]. P. Collaco and J. C. E. Silva (1997), "A complete comparison of 25 contraction conditions", *Nonlinear Anal.*, 30(1), p. 471-476.

[5]. S. Czerwik (1993), "Contraction mappings in b-metric spaces", *Acta Math. Univ. Ostrav.*, (1), p. 5-11.

[6]. S. Czerwik (1998), "Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena,* 46 (2), p. 263-276.

[7]. M. S. Khan, M. Swaleh, and S. Sessa (1984), "Fixed point theorems by altering distances between the points", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 30 (1), p. 1-9.

[8]. P. Kumam, N. V. Dung, and K. Sitthithakerngkiet (2014), "A generalization of iri fixed point theorems", *Filomat*, 7 pages, to appear.

[9]. J. R. Roshan, V. Parvaneh, S. Sedghi, N. Shobkolaei, and W. Shatanawi (2013), "Common fixed points of almost generalized $(\psi,\varphi)_s$-contractive mappings in ordered b-metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2013:159), p. 1-23.

[10]. W. Shatanawi and A. Al-Rawashdeh (2012), "Common fixed points of almost generalized (ψ,φ)-contractive mappings in ordered metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, (2012:80), p. 1-14.

THE FIXED POINT THEOREM FOR ALMOST GENERALIZED (ψ,φ)- CONTRACTIVE MAPPINGS IN ORDERED b-METRIC SPACES

Summary

The purpose of this paper is to introduce the notion of almost generalized (ψ,φ)-contractive mappings in ordered b-metric spaces by adding four items of $d(f^2x,fx)$, $d(f^2x,y)$, $d(f^2x,fy)$, $\dfrac{d(f^2x,x)+d(f^2x,fy)}{2s}$, and establish the fixed point theorem for this kind of mappings. In addition, some examples are provided to illustrate the obtained results.

Keywords: fixed point, b-metric space, almost generalized (ψ,φ)-contractive mapping.