BA THUẬT TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ BẰNG CÁCH THÊM BỚT BIỂU THỨC LIÊN HỢP

• Phạm Quốc Phong(*)

Tóm tắt

Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình chứa căn thức là dạng toán phân hóa học sinh trong các đề thi tuyển sinh. Thêm bớt biểu thức liên hợp là cách giải đặc trưng của dạng toán này. Bài báo đưa ra ba thuật toán giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỷ bằng cách thêm bớt biểu thức liên hợp:"trị số Bezout", "cát tuyến gốc", "đồng dạng tử thức".

***Từ khóa**: phương trình vô tỷ, bất phương trình vô tỷ, hệ phương trình vô tỷ, trị số Bezout, cát tuyến gốc, đồng dạng tử thức.*

1. Mở đầu

Trong chương trình toán trung học phổ thông (THPT), phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ phương trình (HPT) có chứa căn thức là nội dung có sức cuốn hút và hấp dẫn. Chính sự có mặt của các căn thức đã che đậy nhân tử chung của PT, điều này tạo nên sự thú vị của nó. Do đó trong các kỳ thi tuyển sinh đại học (TSĐH) trong những năm gần đây (nay là kỳ thi tốt nghiệp THPT quốc gia) luôn có mặt các PT, BPT, HPT vô tỷ, hơn nữa nó còn là câu hỏi phân hóa thí sinh. Thêm bớt biểu thức liên hợp là cách đặc trưng của giải PT có chứa căn thức. Mấu chốt của phương pháp này là khôi phục biểu thức cần thêm bớt để liên hợp xuất hiện nhân tử chung. Cách giải thêm bớt biểu thức liên hợp không sử dụng đến công cụ đạo hàm. Đây là cách mà các em học sinh khá cuối cấp THPT đủ khả năng giải câu PT, BPT, HPT vô tỷ trong đề thi tốt nghiệp THPT quốc gia. Bài viết này xin giới thiệu ba thuật toán thường sử dụng để giải các PT, BPT, HPT vô tỷ bằng cách đặc trưng ấy. Đó là: "*trị số Bezout*","*cát tuyết gốc*, "*đồng dạng tử thức*". Đi kèm lời giải, chúng tôi đưa ra các nhận xét làm rõ những dấu hiệu để giải bài toán.

2. Ba thuật toán thêm bớt biểu liên hợp để giải PT, BPT và HPT vô tỷ

2.1. Thuật toán 1: Trị số Bezout

Định nghĩa

Trị số Bezout của một căn thức là giá trị của căn thức khi ẩn nhận giá trị là nghiệm số của PT đang xét. Trị số Bezout của căn thức $\sqrt[n]{A(x)}$ tại $x = x_0$ kí hiệu là $\left.\sqrt[n]{A(x)}\right|_{x_0}$.

Giá trị đẹp của một căn thức là giá trị hữu tỉ của căn thức ấy.

Thuật toán

Xét PT:

$$P(x)\sqrt{A(x)} + Q(x)\sqrt[3]{B(x)} = C(x). \quad (1.1)$$

Nếu PT có nghiệm $x = x_0$, ta đặt $a = \sqrt{A(x_0)}$, $b = \sqrt[3]{B(x_0)}$. Khi đó:

$$(1.1) \Leftrightarrow P(x)\left[\sqrt{A(x)} - a\right] + Q(x)\left[\sqrt[3]{B(x)} - b\right] = C(x) - aP(x) - bQ(x)$$

$$\Rightarrow P(x)\frac{A(x) - a^2}{\sqrt{A(x)} + a} + Q(x)\frac{B(x) - b^3}{\sqrt[3]{B^2(x)} + b\sqrt[3]{B(x)} + b^2} = C(x) - aP(x) - bQ(x)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} P(x)\frac{(x - x_0)A'(x)^2}{\sqrt{A(x)} + a} + Q(x)\frac{(x - x_0)B'(x)}{\sqrt[3]{B^2(x)} + b\sqrt[3]{B(x)} + b^2} = (x - x_0)K(x)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{P(x)A'(x)}{\sqrt{A(x)} + a} + \dfrac{Q(x)B'(x)}{\sqrt[3]{B^2(x)} + b\sqrt[3]{B(x)} + b^2} = K(x). \end{array}\right. \quad (1.2)$$

Bài toán đã cho đưa về giải PT (1.2).

▵ Phép biến đổi thêm bớt trị số Bezout như trên gọi là *thuật toán trị số Bezout.*

Ví dụ 1 (Đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông, 2000). Giải PT:

$$\sqrt{4x + 1} - \sqrt{3x - 2} = \frac{x + 3}{5}. \quad (1.3)$$

Nhận xét. Tìm trong các giá trị đẹp của căn thức $\sqrt{4x+1}$, ta thấy PT (1.3) có nghiệm $x = 2$ và $\left.\sqrt{4x+1}\right|_2 = 3$, $\left.\sqrt{3x-2}\right|_2 = 2$. Ta dùng thuật toán trị số Bezout để giải PT.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 4x + 1 \ge 0 \\ 3x - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2}{3}$. (*)

(*) Trường Trung học phổ thông Hồng Lĩnh, thị xã Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh.

Ta có:

$$(1.3) \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2} = 5 \text{ (do (*) và } x+3>0)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x+1}-3)+(\sqrt{3x-2}-2) = 0 \text{ (do } \sqrt{4x+1}\Big|_2 = 3, \sqrt{3x-2}\Big|_2 = 2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{4}{3+\sqrt{4x+1}}+\frac{3}{2+\sqrt{3x-2}}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow x = 2$ (thỏa (*)).

Vậy $x = 2$ chính là nghiệm duy nhất của PT đã cho. □

Chú ý: Việc đoán nghiệm là ý thức thường trực khi giải PT, đặc biệt là PT vô tỷ.

Ví dụ 2 (Đề thi TSĐH khối A$_1$, A, 2014). Xét hệ

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1.4) \\ x^3-8x-1 = 2\sqrt{y-2} & (1.5) \end{cases}.$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 2 \le y \le 12 \\ x^2 \le 12 \end{cases}$. (*)

Ta có:

$$(1.4) \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{12-y}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\sqrt{12-x^2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12-x^2 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Thế (1.6) vào (1.5), ta có:

$$x^3-8x-1 = 2\sqrt{10-x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^3-8x-1)-2 = 2(\sqrt{10-x^2}-1) \text{ (do } \sqrt{10-x^2}\Big|_3 = 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) = \frac{2(9-x^2)}{1+\sqrt{10-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} > 0).$$

Thay $x = 3$ vào (1.6), ta có $y = 3$. Cặp $(x, y) = (3, 3)$ thỏa mãn các điều kiện bài toán. Vậy HPT có 1 nghiệm duy nhất (3; 3).

Nhận xét. Tìm trong các giá trị đẹp của $\sqrt{10-x^2}$, thấy PT $x^3-8x-1 = 2\sqrt{10-x^2}$ có nghiệm $x = 3$, lời giải trên đã áp dụng thuật toán trị số Bezuot, $\left(\sqrt{10-x^2}\Big|_3 = 1\right)$.

Theo bất đẳng thức (BĐT) Bunhiacopxki, xét PT (1.4) ta có:

$$\text{VT} \le \sqrt{x^2+(12-x^2)}\sqrt{(12-y)+y} = 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x}{\sqrt{12-y}} = \dfrac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12-x^2. \end{cases}$$

Chúng tôi gọi PT (1.4) là *PT điểm rơi.* PT điểm rơi của BĐT Bunhiacopxki cho bộ bốn số bao giờ cũng đưa về được PT tổng các bình phương đủ. Cách rút thế bằng PT điểm rơi đang là xu hướng thời sự hiện nay.

Ví dụ 3 (Đề thi TSĐH khối D, 2014). Giải BPT:

$$(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7} \ge x^2+7x+12 \quad (1.7)$$

Nhận xét. Tìm trong các giá trị đẹp của căn thức $\sqrt{x+2}$, ta thấy PT:

$$(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7} = x^2+7x+12$$

có nghiệm $x = 2$ và $\sqrt{x+2}\Big|_2 = 2$, $\sqrt{x+7}\Big|_2 = 3$. Ta dùng thuật toán trị số Bezout để giải PT.

Lời giải. Điều kiện $x \ge -2$. (*)

Ta có:

$$(1.7) \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2)+(x+6)(\sqrt{x+7}-3) \ge x^2+2x-8$$

$$\text{(do } \sqrt{x+2}\Big|_2 = 2, \sqrt{x+7}\Big|_2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x-2}{2+\sqrt{x+2}}+(x+6)\frac{x-2}{3+\sqrt{x+7}} \ge (x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{2+\sqrt{x+2}}+\frac{x+6}{3+\sqrt{x+7}}-x-4\right) \ge 0 \quad (1.8)$$

Để ý rằng $x \ge -2$ nên $x + 2 \ge 0$, $x + 6 > 0$. Ta suy ra:

$$\frac{x+1}{2+\sqrt{x+2}}+\frac{x+6}{3+\sqrt{x+7}}-x-4$$

$$= \frac{x+2}{2+\sqrt{x+2}}-\frac{x+2}{2}+\frac{x+6}{3+\sqrt{x+7}}-\frac{x+6}{2}-\frac{1}{2+\sqrt{x+2}} < 0$$

Do đó (1.8) $\Leftrightarrow x - 2 \le 0$.

Kết hợp với điều kiện (*), suy ra nghiệm của BPT là $-2 \le x \le 2$. □

2.2. Thuật toán 2: Cát tuyến gốc

Xét PT: $\sqrt{A(x)} = B(x),$ (2.1)

với $A(x)$, $B(x)$ là các biểu thức đại số. Nếu biết được PT (2.1) có hai nghiệm $x = x_1, x = x_2$ thì ta có cách giải như sau:

Ta tìm cặp số (a, b) sao cho x_1, x_2 cũng là nghiệm của PT:

$$ax + b = \sqrt{A(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = \sqrt{A(x_1)} \\ ax_2 + b = \sqrt{A(x_2)} \end{cases}.$$

Khi đó x_1, x_2 cũng là nghiệm của PT $ax + b = B(x)$.

Ta biến đổi:

$$(2.1) \Leftrightarrow ax + b - \sqrt{A(x)} = ax + b - B(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-x_1)(x-x_2)A'(x)}{ax+b+\sqrt{A(x)}} = (x-x_1)(x-x_2)B'(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-x_1)(x-x_2) = 0 \\ \dfrac{A'(x)}{ax+b+\sqrt{A(x)}} = B'(x) \end{array}\right. \quad (2.2)$$

Bài toán đã cho đưa về giải PT (2.2).

Thuật toán tìm biểu thức $ax + b$ như trên được gọi là *thuật toán cát tuyến gốc* (hay còn gọi là *thuật toán cát tuyến Bezout*). Căn thức $\sqrt{A(x)}$ được gọi là *đế* của cát tuyến gốc.

Ví dụ 4. Giải PT: $(3-x)\sqrt{6x^2+1} = x+3.$ (2.3)

Nhận xét. Tìm trong các giá trị đẹp của căn thức $\sqrt{6x^2+1}$, ta thấy PT (2.3) có hai nghiệm $x = 0,\ x = 2.$ Do đó ta tìm cặp số (a, b) sao cho $x = 0,\ x = 2$ cũng là nghiệm của PT

$$ax + b = \sqrt{6x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $(3 - x)(3 + x) \geq 0$ $\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$ (*)

Ta có:

$$(2.3) \Leftrightarrow (3-x)(\sqrt{6x^2+1} - 2x - 1) = x + 3 - (3-x)(2x+1)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} (3-x)\frac{6x^2+1-(2x+1)^2}{\sqrt{6x^2+1}+2x+1} = 2x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)\left(1 + \frac{x-3}{\sqrt{6x^2+1}+2x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-2) = 0 \\ \sqrt{6x^2+1} = 2 - 3x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \quad \text{(thỏa (*))}.$$

Vậy PT có ba nghiệm $x = 0,\ x = 2,\ x = 2 - \sqrt{3}.$ □

Nhận xét. Khi PT chứa hai căn thức và biểu thức ngoài căn có bậc không bé hơn 2:

$$\sqrt[n]{A_1(x)} + \sqrt[m]{A_2(x)} = B(x) \quad (2.4)$$

với $m, n \in \{2, 3\}$, $\deg B(x) \geq 2$, ta chia $B(x)$ cho $(x - x_1)(x - x_2)$ và gọi dư thức của phép chia là $px + q$, tức là

$B(x) = px + q + (x - x_1)(x - x_2)B'(x)$. Khi đó ta có:

$$(2.4) \Leftrightarrow \sqrt[n]{A_1(x)} + \sqrt[m]{A_2(x)} = px + q + k(x-x_1)(x-x_2)B'(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt[n]{A(x)} - (ax+b)\right] + \left[\sqrt[m]{A_2(x)} + (a-p)x + b - q\right] = k(x-x_1)(x-x_2)B'(x).$$

Thuật toán cát tuyến Bezout chỉ cần thực hiện với một căn thức, chẳng hạn $\sqrt[n]{A_1(x)}$, khi đó biểu thức liên hợp với căn thức còn lại "*tự động*" xuất hiện. Nghĩa là chỉ mất 1 lần giải hệ tìm $(a,\ b)$, liên hợp còn lại cùng hưởng lợi.

Ví dụ 5. Giải BPT:

$$x\sqrt{5x-4} + (4-x)\sqrt{3+x^2} > x^2 - 2x + 8. \quad (2.5)$$

Nhận xét. Tìm trong các giá trị đẹp của căn thức $\sqrt{5x-4}$, ta thấy PT:

$$x\sqrt{5x-4} + (4-x)\sqrt{3+x^2} = x^2 - 2x + 8$$

có hai nghiệm $x = 1$, $x = 4$. Ta áp dụng thuật toán cát tuyến Bezout với đế $\sqrt{5x-4}$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq \dfrac{4}{5}$ (*).

Ta có:

$$(2.5) \Leftrightarrow x(\sqrt{5x-4} - x) + (4-x)\sqrt{3+x^2} + 2(x-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x(x-1)(x-4)}{\sqrt{5x-4}+x} + \frac{(4-x)(x^2-1)}{\sqrt{3+x^2}+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4)\left(\frac{x}{\sqrt{5x-4}+x} + \frac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}\right) < 0$$

$\Leftrightarrow 1 < x < 4$ (thỏa (*)).

Vậy nghiệm của BPT là $x \in (1; 4)$. □

Ví dụ 6. Giải HPT:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+19} = \dfrac{\sqrt{y+1}}{x^2+18} & (2.6) \\ 2\sqrt{3-2x} + (x+3)\sqrt{4+y} = 3x+y+7 & (2.7) \end{cases}$$

Nhận xét. Từ PT (2.6), ta biểu thị được y theo x, sau đó thế vào PT (2.7), thu được PT chứa căn thức $2\sqrt{3-2x}$. Tìm trong các giá trị đẹp của căn thức, ta thấy PT có nghiệm $x=1$, $x=-2$ nên lời giải áp dụng thuật toán cát tuyến gốc với đế $2\sqrt{3-2x}$.

Lời giải. Điều kiện $0 \le x \le \dfrac{3}{2}, y \ge -1.$ (*)

Ta có:

$$(2.6) \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{y+1}\right)\left[x^2 + x\sqrt{y+1} + \sqrt{(y+1)^2}+18\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 1 \text{ (do } x^2 + x\sqrt{y+1} + \sqrt{(y+1)^2}+18 > 0).$$

Thế $y = x^2 - 1$ vào (2.7), ta có:

$$2\sqrt{3-2x} + (x+3)\sqrt{3+x^2} = x^2+3x+6 \qquad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{3-2x}+x-3) + (x+3)\left(\sqrt{3+x^2}+x+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(x+3)\left(\frac{1}{2\sqrt{3-2x}-x+3} + \frac{2}{\sqrt{3+x^2}-x-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1-x)(x+3) = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3-2x}-x+3} + \dfrac{2}{\sqrt{3+x^2}-x-1} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy (1,0) là nghiệm duy nhất của HPT. □

Nhận xét. Căn thức độc lập

1) Xét PT:

$$P(x)\sqrt[m]{A(x)} + Q(x)\sqrt[n]{B(x)} = C(x),\ (m,n) \in \mathbb{N}^*.$$

Các biểu thức $P(x)$, $Q(x)$ được gọi là các *hệ số của căn thức*.

Khi hệ số của căn thức là hằng số thì căn thức ấy được gọi là *căn thức độc lập*.

2) Khi đã đoán được hai nghiệm phân biệt của PT:

Nếu các căn thức đều là căn thức độc lập thì mỗi căn thức là *đế* của mỗi cát tuyến gốc.

Trong PT chứa nhiều căn thức, thuật toán cát tuyến gốc bao giờ cũng ưu tiên cho căn thức độc lập.

Căn thức không độc lập có thể là đế hoặc có thể không phải là đế.

3) Trong PT (2.8), căn thức $\sqrt{3-2x}$ là đế (còn căn thức $\sqrt{3+x^2}$ không phải là đế).

Ví dụ 7. Giải HPT:

$$\begin{cases} 2\sqrt{y+2} + x\sqrt{8x-2y} = \sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+8x+7}-1\right) & (2.9) \\ 2\sqrt{x^2+x+y} = x+y+1 & (2.10). \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $4x \ge y \ge -2;\ x^2+x+y \ge 0.$ (*)

Ta có:

$$(2.9) \Leftrightarrow 1.\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2}.\sqrt{2y+4} + x\sqrt{8x-2y} = \sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+8x+7} \quad (2.11)$$

Xét PT (2.11) và áp dụng Bunhiacopxki ta có:

$$VT \le \sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+8x+7}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sqrt{x^2+3} : \sqrt{2y+4} : \sqrt{8x-2y} = 1 : \sqrt{2} : x. \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow y = 1 + x^2.$$

Thế $y = 1 + x^2$ vào (2.10) ta có:

$$2\sqrt{2x^2+x+1} = x^2+x+2 \qquad (2.13)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2x^2+x+1}-x-1\right) = x^2 - x$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-x)}{\sqrt{2x^2+x+1}+x+2} = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ \sqrt{2x^2+x+1}+x+2 = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ \sqrt{2x^2+x+1} = -x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2+x+1 = 0. \end{array}\right.$$

Thay giá trị x vào PT $y = 1 + x^2$ ta được:

$$\left[\begin{array}{l} (x=0, y=1) \text{ (loại)} \\ (x=1, y=2) \text{ (nhận).} \end{array}\right.$$

Vậy (1, 2) là nghiệm duy nhất của HPT. □

Nhận xét. PT (2.11) có 2 nghiệm $x=0$, $x=1$. Lời giải bài toán sử dụng thuật toán cát tuyến gốc với đế $\sqrt{2x^2+x+1}$.

PT (2.11) là PT điểm rơi của BĐT Bunhiacopxki cho bộ 6 số. Mỗi PT điểm rơi thực chất là một HPT. PT điểm rơi với bộ 6 số là hệ có 3 PT và 2 ẩn. Do số ẩn ít hơn số PT nên nó không thể biến đổi về tổng các bình phương đủ. Đó là điều khác biệt của nó với PT điểm rơi của BĐT Bunhiacopxki với bộ 4 số).

2.3. Thuật toán 3: Đồng dạng tử thức

Định nghĩa

Cho hai đa thức:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Chúng tôi định nghĩa hai đa thức đồng dạng như sau:

Hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ được gọi là *đồng dạng với nhau* nếu $P(x) = kQ(x)$, $k \neq 0$

$$\Leftrightarrow (a_n : a_{n-1} : \ldots : a_1 : a_0) = (b_n : b_{n-1} : \ldots : b_1 : b_0)$$

Thuật toán

Xét PT $\sqrt{A(x)} = B(x)$. (3.1)

Ta có:

$$(3.1) \Leftrightarrow ax + b - \sqrt{A(x)} = ax + b - B(x)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{(ax+b)^2 - A(x)}{ax + b - \sqrt{A(x)}} = ax + b - B(x). \quad (3.2)$$

Ta tìm cặp số (a, b) sao cho $(ax+b)^2 - A(x)$ đồng dạng với $(ax + b) - B(x)$ tức là:

$$(ax + b)^2 - A(x) = k[(ax + b) - B(x)].$$

Khi đó

$$(3.2) \Leftrightarrow \frac{k\left[ax + b - B(x)\right]}{ax - b - \sqrt{A(x)}} = ax + b - B(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax + b - B(x) = 0 \\ \sqrt{A(x)} = ax + b - k. \end{array}\right.$$

Bài toán đã cho đưa về giải PT $\sqrt{A(x)} = ax + b - k.$

▵ Thuật toán trên chúng tôi gọi là *thuật toán đồng dạng tử thức.* Số thực k được gọi là *tỉ số đồng dạng.*

Ví dụ 8 (Đề thi TSĐH khối A, 2009). Giải PT: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ (3.3)

Lời giải. Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}.$ (*)

Ta có:

$$(3.3) \Leftrightarrow (x-1)^2 = x - \sqrt{2x-1} \quad (3.4)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} (x-1)^2 = \frac{(x-1)^2}{x + \sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + \sqrt{2x-1} = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right. \text{(thỏa (*))}$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x=1, x=2-\sqrt{2}$ □

Nhận xét. Ta làm rõ hạng tử x trong PT (3.4).

Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$(3.3) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + ax + b = ax + b - \sqrt{2x-1}$$

$$\Rightarrow x^2 + (a-3)x + b + 1 = \frac{(ax+b)^2 - (2x-1)}{ax + b + \sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a-3)x + 1 + b = \frac{a^2x^2 + 2(ab-1)x + b^2 + 1}{ax + b + \sqrt{2x-1}}. (3.5)$$

Do tử thức hai vế của (3.5) tỉ lệ với nhau nên ta có

$$(3.5) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1.k \\ b^2 + 1 = (b+1).k \\ 2(ab-1) = (a-3).k \end{cases}.$$

Chọn $k = 1$, ta có $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$

PT (3.4) là đáp số của cặp $(a, b) = (1, 0)$ tương ứng với $k = 1$.

PT (3.3) còn có các cách giải khác, nhưng đến thời điểm có bài viết này chưa thấy cách giải nào đơn giản hơn cách trên.

Tỉ số đồng dạng k là chìa khóa của thuật toán đồng dạng tử thức, chỉ cần biết k là xem như đã biết lời giải.

Ví dụ 9 (Đề thi TSĐH khối B, 2014). Giải HPT

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (3.6) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (3.7) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $y \geq 0;\ x - 2y \geq 0;$ $4x - 5y - 3 \geq 0.$ (*)

Do $\sqrt{y}\Big|_1 = 1$ nên ta có:

$$(3.6) \Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)(\sqrt{y}-1) + x - y - 1 \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y} - 1) = (x-y-1)(\sqrt{y}-1) \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow (1-y)\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1} = -(x-y-1)(1-\sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(1-\sqrt{y})\left(\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}+1}+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=x-1. \end{array}\right.$$

Thay hai đẳng thức trên vào (3.8), ta có:

• Với $y = 1$, ta có $x = 3$ (thỏa (*)) .

• Với $y = x - 1$ kết hợp với điều kiện (*) ta có $1 \le x \le 2$. PT (3.8) trở thành

$$2x^2 - x - 3 = \sqrt{2-x} \qquad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow -2(x^2-x-1) = (x-1) - \sqrt{2-x} \qquad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow -2(x^2-x-1) = \frac{x^2-x-1}{\sqrt{2-x}+x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(2+\frac{1}{\sqrt{2-x}+x-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (do } 1 \le x \le 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vậy HPT có hai nghiệm (3; 1), $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. □

Nhận xét. 1) Sự xuất hiện hạng tử $(x - 1)$ trong PT (3.11)

Do ta không đoán được nghiệm hữu tỉ của PT (3.11) nên các thuật toán 1, 2 nói trên không có hiệu lực. Lúc bấy giờ thuật toán 3 được vận dụng, dù nó không hề được ưu tiên.

Với mọi $(a,b) \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(3.10) \Leftrightarrow ax + b - (2x^2 - x - 3) = ax + b - \sqrt{2-x}$$

$$\Rightarrow -2x^2 + (a+1)x + b + 3 = \frac{a^2x^2 + (2ab+1)x + b^2 - 2}{ax + b + \sqrt{2-x}}.$$

Ta tìm cặp (a, b) thỏa mãn $\begin{cases} a^2 = -2.k \\ b^2 - 2 = (b+3)k \\ 2ab + 1 = (a+1)k \end{cases}$.

Chọn $k = -\frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2(b^2-2) = -b-3 \\ 2(2ab+1) = -a-1 \end{cases}$.

Từ đó suy ra được $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$. PT (3.11) là đáp số của cặp $(a, b) = (1, -1)$.

2) Phép biến đổi dẫn ra PT (3.8) được hiểu theo 1 trong 3 dấu hiệu sau:

Dấu hiệu 1. Ta thấy rằng với mọi $x \ge 1$, PT (3.6) có nghiệm $y = 1$ và $\sqrt{y}\Big|_1 = 1$, do đó ta áp dụng thuật toán *trị số Bezout* vào vế phải PT (3.6).

Dấu hiệu 2. Các nhân tử $(1- y)$, $\sqrt{y}$ cùng có mặt trong PT (3.6), ta liên tưởng $1-y = \left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right)$, dẫn đến tái tạo $\sqrt{y}-1$.

Dấu hiệu 3. 1) PT (3.6) có dạng $A\sqrt{P} + B\sqrt{Q} = C$ với $A = 1-y$, $B = -x+y+1$ $C = 2-x$.

$$\Rightarrow a.A + b.B + C = a(1-y) + b(-x+y+1) + (2-x)$$
$$= -(b+1)x + (b-a)y + (2+a+b)$$

Do đó $a.A + b.B + C \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2 - a - b = b - 1 = b - a = 0$

$\Leftrightarrow a = b = -1.$

2) PT (3.9) là đáp số của cặp $(a,b) = (-1,-1)$.

3) PT nửa vô định

Với $y = 1$, PT (3.6) trở thành $x = x \Leftrightarrow 0.x = 0$. Nghĩa là PT (3.6) có nghiệm $(x, y) = (t, 1)$, $\forall t \ge 2$. Chúng tôi nói PT (3.6) là PT nửa vô định. Một cách tổng quát chúng tôi định nghĩa như sau:

PT $f(x; y) = 0$ được gọi là *PT nửa vô định* nếu tồn tại $x = x_0$ (hay $y = y_0$) sao cho khi thay vào PT $f(x; y) = 0$ được PT $f(x_0; y) = 0$ (hay PT $f(x; y_0) = 0$) có vô số nghiệm đối với y (đối với x).

Mối liên hệ giữa thuật toán trị số Bezout và PT nửa vô định là mối liên hệ hữu cơ.

Bài tập

Giải các PT, HPT sau

1. $3\sqrt{x^2-3x+3} = 2x^2 - 6x + 7$;

2. $2\sqrt{2x^2+x+1}=x^2+x+2$

3. $(x-3)\sqrt{3x+1}=3x-7$;

4. $(2x-4)\sqrt{2x-1}=5x-7$;

5. $2(x-3)\sqrt{2x-3}=5x-12$;

6. $\sqrt{7-3x^2}=5x^3-2x^2-1$;

7. $(x-1)\sqrt{5x^2-4}=2x$;

8. $2\sqrt{x^2+21}=x^2-7x-8$;

9. $(x+1)\sqrt{5x^2-4}+8-10x=0$

10. $4x^2-11x+10=(5x-8)\sqrt{3x-2}$;

11. $\begin{cases}(2x-y-1)\sqrt{2y+1}=2x-2y-1-y\sqrt{2x-y}\\(3x-y)\sqrt{24x-10y+1}=6x-5y\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt{3x}+3\sqrt{y}=2\sqrt{3(x+y)}\\2y-x^2-3=2\sqrt{x+y-3}\end{cases}$;

13. $\begin{cases}(y+1)\sqrt{x+y+1}+(x+y)\sqrt{y+2}=x+2y+1\\(x-y-4)\sqrt{3x+y-1}=3x-2y-7\end{cases}$;

14. $\begin{cases}\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{\sqrt{y-1}}{x^2+2}\\2(x-3)\sqrt{2x-3}=8x-3y^2-9\end{cases}$;

15. $\begin{cases}2x+9y+(1-y)\sqrt{x+4y}=3+(x+4y-1)\sqrt{y+3}\\2+4y=(x+1)\sqrt{1+4y(1+x)}\end{cases}$.

16. $\begin{cases}\dfrac{(x^2-1)(y+1)}{y^2+2y+2}=\dfrac{xy(y+2)}{x^2+1}\\4\sqrt{x(y+1)}=x^2+2y-5x+8\end{cases}$.

17. $\begin{cases}(x-y+1)\sqrt{1+y}+4=2x+(3-y)\sqrt{x-y+5}\\(y+1)\sqrt{y^2-2x+2}=2(x+xy-1)\end{cases}$

3. Kết luận

Trong bài báo, chúng ta tôi đã giới thiệu 3 thuật toán: "trị số Bezout", "cát tuyết gốc", "đồng dạng tử thức" để giải PT, BPT, HPT vô tỷ có chứa căn thức bằng cách sử dụng biểu thức liên hợp. Sau đó, chúng tôi ứng dụng 3 thuật toán đó để giải các bài toán trong các đề thi TSĐH và các bài toán do chúng tôi đề xuất như là ví dụ minh họa. Đặc biệt, trong các ví dụ chúng tôi đưa ra các nhận xét nhằm làm rõ cơ sở toán học của lời giải, giải mã các bí ẩn bị che khuất bởi các căn thức trong PT, BPT, HPT. Ba thuật toán "trị số Bezout", "cát tuyết gốc", "đồng dạng tử thức" đưa ra cách giải PT, BPT, HPT vô tỷ một cách trong sáng, rõ ràng, dễ vận dụng.

Tài liệu tham khảo

[1]. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Đề thi tuyển sinh Đại học môn Toán.*

[2]. Nguyễn Bá Kim (2005), *Phương pháp dạy học đại cương môn Toán (Giáo trình của dự án đào tạo giáo viên THCS)*, NXB Đại học Sư phạm.

[3]. Phạm Quốc Phong (2008), *Bồi dưỡng giải tích 12*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[4]. Phạm Quốc Phong (2011), *Bồi dưỡng đại số 10*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[5]. Phạm Quốc Phong (2014), *Bộ đề luyện thi thử đại học cao đẳng môn toán*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[6]. Phạm Quốc Phong (2007), *Chuyên đề nâng cao đại số trung học phổ thông*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[7]. Nguyễn Quang Sơn (2015), *Khám phá tư duy giải nhanh thần tốc bộ đề luyện thi quốc gia môn toán*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[8]. Nguyễn Tất Thu (2013), *Cẩm nang luyện thi đại học đại số sơ cấp*, NXB Tổng Hợp Thành phố Hồ Chí Minh.

THREE ALGORITHMS SOLVING IRRATIONAL EQUATIONS, IN-EQUATIONS AND EQUATION SYSTEM BY SUBTRACTING AND ADDING INTEGRATED EXPRESSIONS

Summary

Equation, inequation and equation systems containing roots are those mathematical problems grading students in university entrance exams. Subtracting and adding integrated expressions are typical in these problems. This article proposes three algorithms to solve irrational equations, inequations and equation systems by adding and substracting integrated expressions of “Bezout value”, “original secant”, “numerator similarity”.

Keywords: irrational equation, irrational inequations, irrational equation system, Bezout value, original secant, numerator similarity.

Ngày nhận bài: 10/5/2016; Ngày nhận lại: 05/6/2016; Ngày duyệt đăng: 27/6/2016.