VỀ METRIC SINH BỞI TỰA METRIC RIÊNG

Nguyễn Văn Dũng[1*] và Nguyễn Thị Tuyết Trinh[2]

[1]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[2]*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Văn Dũng, Email: nvdung@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 07/7/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 22/8/2021; Ngày duyệt đăng: 28/8/2021

Tóm tắt

Trong bài báo này, từ một tựa metric riêng đã cho chúng tôi xây dựng một metric và một metric riêng. Đồng thời chúng tôi thiết lập và chứng minh mối quan hệ giữa dãy hội tụ, dãy Cauchy và tính đầy đủ giữa chúng.

Từ khóa: *Metric, metric riêng, tựa metric riêng.*

ON THE METRIC GENERATED BY THE QUASI PARTIAL METRIC

Nguyen Van Dung[1*] and Nguyen Thi Tuyet Trinh[2]

[1]*Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[2]*Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, Dong Thap University, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Nguyen Van Dung, Email: nvdung@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 07/7/2021; Received in revised form: 22/8/2021; Accepted: 28/8/2021

Abstract

From a given quasi partial metric, we propose a corresponding metric and a corresponding partial metric. We also state and prove the relationships between the convergent sequence, the Cauchy sequence and the completeness between these settings.

Keywords: *Metric, partial metric, quasi partial metric.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1026

Trích dẫn: Nguyễn, V. D., & Nguyễn, T. T. T. (2023). Về metric sinh bởi tựa metric riêng. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, *12*(2), 3-12. https://doi.org/10.52714/dthu.12.2.2023.1026.

1. Mở đầu

Không gian metric là một trong những khái niệm cơ bản của giải tích hiện đại, có vai trò quan trọng trong nhiều mô hình toán học. Việc mở rộng không gian metric và nghiên cứu tính chất của các không gian mở rộng là một hướng nghiên cứu được nhiều tác giả quan tâm. Năm 2012, K. P. Chi và cộng sự đã thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho ánh xạ co yếu suy rộng trong không gian metric riêng đầy đủ (Chi & cs., 2012). Năm 2017, N. V. Dũng đã nghiên cứu tính đầy đủ hóa của không gian metric riêng (Nguyen, 2017). Thời gian qua, một số không gian metric suy rộng được giới thiệu và nghiên cứu, sử dụng trong Lí thuyết điểm bất động, trong đó có không gian metric riêng và không gian tựa metric riêng (Haghi & cs., 2013). Gần đây, Gharibi & Jahedi đã nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của điểm bất động đối với ánh xạ xác định trên tích của các không gian tựa metric riêng (Gharibi & Jahedi, 2019). Các tác giả cũng đã đề xuất một số điều kiện phù hợp và xây dựng các ví dụ minh họa.

Chúng tôi nhận thấy rằng, tính chất topo của không gian tựa metric riêng chưa được nghiên cứu, nhiều dạng định lí điểm bất động quen thuộc chưa được thiết lập và chứng minh trong không gian tựa metric riêng. Bên cạnh đó, một số tính chất trong không gian tựa metric riêng có thể tiếp cận bằng một cấu trúc metric phù hợp.

Trong bài báo này, từ một tựa metric riêng đã cho chúng tôi xây dựng một metric và một metric riêng. Đồng thời chúng tôi thiết lập và chứng minh mối quan hệ giữa dãy hội tụ, dãy Cauchy và tính đầy đủ giữa chúng.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm, kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Khái niệm metric là sự mở rộng của không gian ba chiều với khoảng cách thông thường với ba đặc trưng tiêu biểu: tính không âm, tính đối xứng, bất đẳng thức tam giác.

Định nghĩa 1.1. (Trần & cs., 2017). Giả sử X là một tập khác rỗng và $d: X \times X \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Khi đó

1. d được gọi là một *metric* trên X và (X, d) được gọi là một *không gian metric*.

2. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là *hội tụ* đến điểm $x \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

3. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

4. Không gian metric (X, d) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ trong X.

Định nghĩa dưới đây mở rộng từ định nghĩa metric bằng cách bỏ đi tính đối xứng.

Định nghĩa 1.2. (Gharibi & Jahedi, 2019). Giả sử X là một tập khác rỗng và $q: X \times X \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$,

1. $q(x, y) \geq 0$.
2. $q(x, y) = q(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$.

Khi đó q được gọi là một *tựa metric* trên X và (X, q) được gọi là một không gian *tựa metric*.

Không gian metric được mở rộng thành không gian metric riêng như sau.

Định nghĩa 1.3. (Gharibi & Jahedi, 2019). Giả sử X là một tập khác rỗng và $p: X \times X \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$,

1. $p(x, y) \geq 0$.
2. $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \Leftrightarrow x = y$.
3. $p(x, x) \leq p(x, y)$.
4. $p(x, y) = p(y, x)$.
5. $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

Khi đó

1. p được gọi là một *metric riêng* trên X và (X, p) được gọi là một *không gian metric riêng.*

2. Dãy $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ* đến điểm $x \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x)$.

3. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ tồn tại.

4. Không gian metric riêng (X, p) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy $\{x_n\} \subset X$ là một dãy hội tụ đến một điểm $x \in X$ và $\lim_{n,m\to\infty} p(x_m, x_n) = p(x, x)$.

Định nghĩa dưới đây mở rộng từ định nghĩa metric riêng bằng làm yếu đi điều kiện (2) và bỏ đi điều kiện (3), (4).

Định nghĩa 1.4. (Karapınar & cs., 2013). Giả sử X là một tập khác rỗng và $qp: X \times X \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$,

1. $qp(x,y) \geq 0$.
2. Nếu $qp(x,x) = qp(x,y) = qp(y,y)$ thì $x = y$.
3. $qp(x,x) \leq qp(x,y)$.
4. $qp(x,x) \leq qp(y,x)$.
5. $qp(x,y) + qp(z,z) \leq qp(x,z) + qp(z,y)$.

Khi đó

1. qp được gọi là một *tựa metric riêng* trên X và (X, qp) được gọi là một *không gian tựa metric riêng*.

2. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là *hội tụ* đến điểm $x \in X$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = qp(x,x).$$

3. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$ và $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n)$ tồn tại. Điều này tương đương với $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$ tồn tại.

4. Không gian tựa metric riêng (X, qp) được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy $\{x_n\} \subset X$ là một dãy hội tụ đến một điểm $x \in X$ và $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) =$

$$\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) = qp(x,x).$$

Từ một tựa metric riêng đã cho R. Gharibi and S. Jahedi đã thiết lập một số metric riêng và tựa metric như sau.

Mệnh đề 1.5. (Gharibi & Jahedi, 2019). *Giả sử*

1. X là một tập khác rỗng và (X, qp) là một không gian tựa metric riêng.

2. qp^s: $X\times X \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $qp^s(x,y) = qp(x,y) + qp(y,x) - qp(x,x) - qp(y,y)$

với mọi $x, y \in X$.

Khi đó:

1. Nếu $qp(x,y) = qp(y,x)$ với mọi $x, y \in X$ thì qp là một metric riêng trên X.

2. Cho tựa metric riêng qp trên một tập X khác rỗng, những hàm số sau là tựa metric trên X:

$q_{qp}(x,y) = qp(x,y) - qp(x,x)$.

${q_{qp}}^{-1}(x,y) = q_{qp}(y,x) = qp(y,x) - qp(y,y)$.

$\overline{q_{qp}}(x,y) = {q_{qp}}^{-1}(x,y) - {q_{qp}}^{-1}(y,x)$

$= qp(y,x) - qp(x,x)$.

$\overline{q_{qp}}^{-1}(x,y) = \overline{q_{qp}}(y,x) = qp(x,y) - qp(y,y)$.

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, chúng ta có được bổ đề sau.

Bổ đề 1.6. *Nếu $a, b \in \mathbb{R}$ thì*

$$|a - b| = max\{a,b\} - min\{a,b\}.$$

2. Kết quả chính

Định lí sau đây cho thấy mối quan hệ giữa không gian tựa metric riêng và không gian metric.

Định lí 2.1. *Giả sử (X, qp) là một không gian tựa metric riêng. Với mọi $x, y \in X$, đặt*

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\}.$$

Khi đó ta có

1. d là một metric trên X.

2. Nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian metric (X, d) thì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian tựa metric riêng (X, qp).

3. Dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp) khi và chỉ khi dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian metric (X, d).

4. Không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ khi và chỉ khi không gian metric (X, d) là đầy đủ.

Chứng minh. (1) Giả sử $x, y, z \in X$. Ta chứng minh $d(x,y) \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} d(x,y) &= max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\} \\ &\geq max\{qp(x,x), qp(y,y)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ta chứng minh $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thật vậy

Nếu $x = y$ thì

$$d(x,y) = qp(x,x) - qp(x,x) = 0.$$

Nếu $d(x,y)=0$ thì $max\{qp(x,y),qp(y,x)\}$
$$=min\{qp(x,x),qp(y,y)\}.$$

Ta có
$$min\{qp(x,x),qp(y,y)\}\le qp(x,y)\le max\{qp(x,y),qp(y,x)\}$$
$$min\{qp(x,x),qp(y,y)\}\le qp(y,x)\le max\{qp(x,y),qp(y,x)\}.$$

Suy ra $qp(x,x)=qp(x,y)=qp(y,y)$.

Vậy $x=y$.

Ta chứng minh $d(x,y)=d(y,x)$.

Thật vậy
$$d(x,y)=max\{qp(x,y),qp(y,x)\}-min\{qp(x,x),qp(y,y)\}$$
$$=max\{qp(y,x),qp(x,y)\}-min\{qp(y,y),qp(x,x)\}$$
$$=d(y,x).$$

Ta chứng minh
$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y).$$

Ta có
$$qp(x,y)\le qp(x,z)+qp(z,y)-qp(z,z).$$

Do đó
$$d(x,y)=max\{qp(x,y),qp(y,x)\}-min\{qp(x,x),qp(y,y)\}.$$
$$\le max\{qp(x,z)+qp(z,y)-qp(z,z),qp(y,z)+qp(z,x)-qp(z,z)\}-min\{qp(x,x),qp(y,y)\}$$
$$=max\{qp(x,z)+qp(z,y),qp(y,z)+qp(z,x)\}-qp(z,z)-min\{qp(x,x),qp(y,y)\}$$
$$\le max\{qp(x,z),qp(z,x)\}+max\{qp(z,y),qp(y,z)\}-qp(z,z)-min\{qp(x,x),qp(y,y)\}.$$

Ta chứng minh
$$qp(z,z)+min\{qp(x,x),qp(y,y)\}\ge min\{qp(z,z),qp(y,y)\}+min\{qp(x,x),qp(z,z)\}. \quad (1)$$

Thật vậy

Nếu $qp(z,z)\le qp(x,x)$

và $qp(z,z)\le qp(y,y)$

thì $min\{qp(x,x),qp(y,y)\}\ge qp(z,z)$.

Khi đó $qp(z,z)+min\{qp(x,x),qp(y,y)\}$
$$\ge qp(z,z)+qp(z,z)$$
$$=min\{qp(x,x),qp(z,z)\}+min\{qp(z,z),qp(y,y)\}.$$

Nếu $qp(z,z)\le qp(x,x)$ và

$qp(z,z)>qp(y,y)$ thì

$qp(z,z)+min\{qp(x,x),qp(y,y)\}$

$=qp(z,z)+qp(y,y)$

$=min\{qp(z,z),qp(y,y)\}+min\{qp(x,x),qp(z,z)\}$.

Nếu $qp(z,z)\ge qp(x,x)$ và

$qp(z,z)\ge qp(y,y)$ thì

$qp(z,z)+min\{qp(x,x),qp(y,y)\}$

$\ge qp(x,x)+qp(y,y)$

$=min\{qp(z,z),qp(y,y)\}+min\{qp(x,x),qp(z,z)\}$.

Nếu $qp(z,z)\ge qp(x,x)$ và

$qp(z,z)<qp(y,y)$ thì $min\{qp(x,x),qp(y,y)\}=qp(x,x)$.

Khi đó
$$qp(z,z)+min\{qp(x,x),qp(y,y)\}=qp(z,z)+qp(x,x)$$
$$=min\{qp(z,z),qp(y,y)\}+min\{qp(x,x),qp(z,z)\}.$$

Suy ra $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

Vậy d là một metric trên X.

(2). Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ trong không gian metric (X,d). Khi đó $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$.

Khi đó, theo Bổ đề 1.6 ta có
$$0\le |qp(x,x_n)-qp(x,x)|$$
$$=\max\{qp(x,x_n),qp(x,x)\}-min\{qp(x,x_n),qp(x,x)\}$$
$$\le max\{qp(x,x_n),qp(x_n,x)\}-min\{qp(x_n,x_n),qp(x,x)\}$$
$$=d(x_n,x).$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}|qp(x,x_n)-qp(x,x)|=0$

hay $\lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = qp(x, x)$.

Mặt khác, theo Bổ đề 1.6 ta có

$$\begin{aligned}
0 &\le |qp(x_n, x) - qp(x, x)| \\
&= max\{qp(x_n, x), qp(x, x)\} \\
&- \min\{qp(x_n, x), qp(x, x)\} \\
&\le max\{qp(x_n, x), qp(x, x_n)\} \\
&- min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\} \\
&= d(x_n, x).
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} |qp(x_n, x) - qp(x, x)| = 0$

hay $\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = qp(x, x)$.

Vậy $\lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = qp(x, x)$.

(3). (⇒). Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, qp). Khi đó tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{m,n\to\infty} qp(x_n, x_m) = \lim_{m,n\to\infty} qp(x_m, x_n) = a.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n) = \lim_{m\to\infty} qp(x_m, x_m) = a.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) \\
&= \lim_{m,n\to\infty} (max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\} \\
&- min\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m)\}) \\
&= a - a = 0.
\end{aligned}$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric (X, d).

(⇐). Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric (X, d). Khi đó, với $\varepsilon = \frac{1}{2}$, khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ với mọi $m, n > n_0$. Ta có

$$\begin{aligned}
&0 \le qp(x_n, x_n) \\
&= qp(x_n, x_n) - qp(x_{n_0}, x_{n_0}) + qp(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\le |qp(x_n, x_n) - qp(x_{n_0}, x_{n_0})| + qp(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\le max\{qp(x_n, x_n), qp(x_{n_0}, x_{n_0})\} \\
&\quad - min\{qp(x_n, x_n), qp(x_{n_0}, x_{n_0})\} \\
&\quad + qp(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\quad \le max\{qp(x_n, x_{n_0}), qp(x_{n_0}, x_n)\} \\
&\quad - min\{qp(x_n, x_n), qp(x_{n_0}, x_{n_0})\} \\
&\quad + qp(x_{n_0}, x_{n_0}) \le d(x_n, x_{n_0}) + qp(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\quad \le 2d(x_n, x_{n_0}) + qp(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\quad < 1 + qp(x_{n_0}, x_{n_0}).
\end{aligned}$$

Suy ra $\{qp(x_n, x_n)\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$. Do đó tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho dãy con $\{qp(x_{k_n}, x_{k_n})\}$ hội tụ về a. Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric (X, d) nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n > n_\varepsilon$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó theo Bổ đề 1.6 ta có

$$\begin{aligned}
&|qp(x_n, x_n) - qp(x_m, x_m)| \\
&= max\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m)\} \\
&- min\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m)\} \\
&\le \max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\} \\
&- \min\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m) \\
&\le d(x_n, x_m) \le 2\, d(x_n, x_m) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Suy ra dãy $\{qp(x_n, x_n)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Do đó $\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n) = a$.

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
&|max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\} - a| \\
&\le |max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\} \\
&- min\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m)\}| \\
&+ |min\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m)\} - a| \\
&= d(x_n, x_m) + |min\{qp(x_n, x_n), qp(x_m, x_m)\} - a|.
\end{aligned}$$

Vì $\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n) = a$ nên

$$\lim_{m,n\to\infty} |max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\} - a| = 0.$$

Suy ra $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) = a$.

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp).

(4). (⇐). Giả sử không gian metric (X, d) là đầy đủ. Lấy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Theo (3), ta suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric (X, d). Vì không gian metric (X, d) là đầy đủ nên

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

trong không gian metric (X, d). Mặt khác, theo (2) ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
qp(x, x) &= \lim_{m,n\to\infty} qp(x_m, x_n) \\
&= \lim_{m,n\to\infty} qp(x_n, x_m).
\end{aligned}$$

Vì tồn tại $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$ và $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n)$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n) = qp(x, x).$$

Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian metric (X, d) nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $n > n_0$. Khi đó, theo Bổ đề 1.6 ta có

$$\begin{aligned}
&|qp(x_n, x_n) - qp(x, x)| \\
&= max\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\} - min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\} \\
&= 2[\frac{max\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\} + min\begin{Bmatrix} qp(x_n, x_n), \\ qp(x, x) \end{Bmatrix}}{2} - min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\}] \\
&= 2[\frac{qp(x_n, x_n) + qp(x, x)}{2} - min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\}] \\
&\leq 2[qp(x_n, x) - min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\}] \\
&\leq 2[max\{qp(x_n, x), qp(x, x_n)\} - min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\}] \\
&= 2d(x_n, x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n) = qp(x, x)$.

Vậy không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ.

$(\Rightarrow)$. Giả sử không gian tựa metric riêng (X, qp) đầy đủ. Lấy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric (X, d). Theo (3), ta suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Vì không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ nên

$$\begin{aligned}
qp(x, x) &= \lim_{m,n\to\infty} qp(x_m, x_n) \\
&= \lim_{m,n\to\infty} qp(x_m, x_n).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$qp(x, x) = \lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
d(x_n, x) = max\{qp(x_n, x), qp(x, x_n)\} \\
-min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \\
&= \lim_{m,n\to\infty} (max\{qp(x_n, x), qp(x, x_n)\} \\
&\quad -min\{qp(x_n, x_n), qp(x, x)\}) \\
&= qp(x, x) - qp(x, x) = 0.
\end{aligned}$$

Khi đó $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Vậy không gian tựa metric riêng (X, qp) đầy đủ.

Định lí sau đây cho thấy mối quan hệ giữa không gian tựa metric riêng và không gian metric riêng.

Định lí 2.2. *Giả sử (X, qp) là một không gian tựa metric riêng. Với mọi $x, y \in X$, đặt*

$$p(x, y) = max\{qp(x, y), qp(y, x)\}.$$

Khi đó ta có

1. p là một metric riêng trên X.

2. Nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian tựa metric riêng (X, qp) thì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian metric riêng (X, p).

3. Dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp) khi và chỉ khi dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian metric riêng (X, p).

4. Nếu không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ thì không gian metric riêng (X, p) là đầy đủ.

Chứng minh. (1) Giả sử $x, y, z \in X$. Ta chứng minh

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thật vậy, giả sử

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y).$$

Suy ra $max\{qp(x, x), qp(x, x)\}$

$$\begin{aligned}
&= max\{qp(x, y), qp(y, x)\} \\
&= max\{qp(y, y), qp(y, y)\}.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$qp(x, x) = max\{qp(x, y), qp(y, x)\} = qp(y, y). \quad (1)$$

Vì

$$qp(x, x) \leq qp(x, y) \leq max\{qp(x, y), qp(y, x)\}$$
$$qp(y, y) \leq qp(y, x) \leq max\{qp(x, y), qp(y, x)\}$$

nên từ (1) ta suy ra $qp(x, x) = qp(x, y) = qp(y, y)$. Suy ra $x = y$.

Tiếp theo, giả sử $x = y$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&max\{qp(x, x), qp(x, x)\} \\
&= max\{qp(x, y), qp(y, x)\} \\
&= max\{qp(y, y), qp(y, y)\}.
\end{aligned}$$

Suy ra $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$.

Ta chứng minh $p(x, x) \leq p(x, y)$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
p(x, x) &= max\{qp(x, x), qp(x, x)\} \\
&\leq max\{qp(x, y), qp(y, x)\} = p(x, y).
\end{aligned}$$

Ta chứng minh $p(x, y) = p(y, x)$. Thật vậy

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\}$$
$$= max\{qp(y,x), qp(x,y)\}$$
$$= p(y,x).$$

Ta chứng minh

$$p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$$

Thật vậy

$$p(x,z) = max\{qp(x,z), qp(z,x)\}$$
$$\le \max\{qp(x,y) + qp(y,z) - qp(y,y), qp(z,y) + qp(y,x) - qp(y,y)\}$$
$$\le max\{qp(x,y) + qp(y,z), qp(z,y) + qp(y,x)\} - qp(y,y)$$
$$\le max\{qp(x,y), qp(y,x)\} + max\{qp(y,z), qp(z,y)\} - qp(y,y)$$
$$\le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$$

Vậy p là một metric riêng trên X.

(2). Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Khi đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} qp(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x) = qp(x,x).$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} (max\{qp(x_n, x), qp(x, x_n)\})$$
$$= max\{qp(x,x), qp(x,x)\}$$
$$= p(x,x).$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian metric riêng (X, p).

(3). $(\Rightarrow)$. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Khi đó tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{m,n\to\infty} qp(x_n, x_m) = \lim_{m,n\to\infty} qp(x_m, x_n) = a.$$

Suy ra

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n)$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\}$$
$$= a.$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric riêng (X, p).

$(\Leftarrow)$. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric riêng (X, p). Khi đó tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = c$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = c.$$

Mặt khác

$$qp(x_n, x_n) \le qp(x_n, x_m)$$
$$\le max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\}.$$

Khi đó

$$c = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n)$$
$$\le \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$$
$$\le \lim_{n,m\to\infty} (max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\}) = c.$$

Suy ra

$$c \le \lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) \le c.$$

Vậy $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) = c$.

Tương tự ta có

$$qp(x_n, x_n) \le qp(x_m, x_n)$$
$$\le max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\}.$$

Khi đó

$$c = \lim_{n\to\infty} qp(x_n, x_n)$$
$$\le \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n)$$
$$\le \lim_{n,m\to\infty} (max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\}) = c.$$

Suy ra

$$c \le \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) \le c.$$

Vậy $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) = c$.

Từ những lập luận trên ta có $\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m) = \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) = c$. Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp).

(4). Giả sử không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ. Lấy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric riêng (X, p). Theo (3) ta suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Vì không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ nên $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian tựa metric riêng (X, qp). Theo (2) ta suy ra $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trong không gian metric riêng (X, p). Mặt khác, vì không gian tựa metric riêng (X, qp) là đầy đủ nên

$$\lim_{n,m\to\infty} qp(x_n, x_m)$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} qp(x_m, x_n) = qp(x,x).$$

Ta có

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} (max\{qp(x_n, x_m), qp(x_m, x_n)\})$$
$$= qp(x,x) = p(x,x).$$

$\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong không gian metric riêng (X, q). Vậy không gian metric riêng (X, p) là đầy đủ.

Ví dụ sau minh họa cho những kết quả đạt được phía trên đối với tựa metric riêng trong Ví dụ 3.5 trong tài liệu (Gharibi & Jahedi, 2019).

Ví dụ 2.3. Giả sử $X = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$ và hàm $qp: X \times X \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi

$$qp(x,y) = \begin{cases} 2x + y + 2, & x \neq y \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

Khi đó

1. qp là một tựa metric riêng trên X.
2. Metric d trong Định lí 2.1 được xác định như sau

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{5}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(0,\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3},0\right)\right\} \\ 3, & (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \frac{10}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(\frac{1}{3},1\right), \left(1,\frac{1}{3}\right)\right\}. \end{cases}$$

3. Metric riêng p trong Định lí 2.2 được xác định như sau

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \frac{8}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(0,\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3},0\right)\right\} \\ 4, & (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\} \\ \frac{13}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(\frac{1}{3},1\right), \left(1,\frac{1}{3}\right)\right\}. \end{cases}$$

Giải. (1). Theo Ví dụ 3.5 trong tài liệu (Gharibi & Jahedi, 2019) thì qp là một tựa metric riêng trên X.

(2). Nếu $x = y$ thì

$qp(x,y) = qp(y,x) = qp(x,x) = qp(y,y) = 1.$

Khi đó ta có

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\}$$
$$= max\{1,1\} - min\{1,1\} = 1 - 1 = 0.$$

Nếu $(x,y) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ thì

$$qp(x,y) = \frac{7}{3}, qp(y,x) = \frac{8}{3}$$

và $qp(x,x) = qp(y,y) = 1$. Khi đó ta có

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\}$$
$$= max\left\{\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right\} - min\{1,1\}$$
$$= \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

Nếu $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ thì

$$qp(x,y) = \frac{8}{3}, qp(y,x) = \frac{7}{3}$$

và $qp(x,x) = qp(y,y) = 1$. Khi đó ta có

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\}$$
$$= max\left\{\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right\} - min\{1,1\}$$
$$= \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

Nếu $(x,y) = (0, 1)$ thì

$$qp(x,y) = 3, qp(y,x) = 4$$

và $qp(x,x) = qp(y,y) = 1$. Khi đó ta có

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\}$$
$$= max\{3,4\} - min\{1,1\}$$
$$= 4 - 1 = 3.$$

Nếu $(x,y) = (1, 0)$ thì

$$qp(x,y) = 4, qp(y,x) = 3$$

và $qp(x,x) = qp(y,y) = 1$. Khi đó ta có $d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\} = max\{4,3\} - min\{1,1\} = 4 - 1 = 3.$

Nếu $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ thì

$$qp(x,y) = \frac{11}{3}, qp(y,x) = \frac{13}{3}$$

và $qp(x,x) = qp(y,y) = 1$. Khi đó ta có

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\}$$
$$= max\left\{\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right\} - min\{1,1\}$$
$$= \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3}.$$

Nếu $(x,y) = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ thì

$$qp(x,y) = \frac{13}{3}, qp(y,x) = \frac{11}{3}$$

và $qp(x,x) = qp(y,y) = 1$.

Khi đó ta có

$$d(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} - min\{qp(x,x), qp(y,y)\} = max\left\{\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right\} - min\{1,1\} = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3}.$$

Từ những tính toán trên, ta có metric d trong Định lí 2.1 được xác định bởi

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{5}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right)\right\} \\ 3, & (x,y) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \frac{10}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}. \end{cases}$$

(3). Nếu $x = y$ thì

$$qp(x,y) = qp(y,x) = 1.$$

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\{1,1\} = 1.$$

Nếu $(x,y) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ thì

$qp(x,y) = \frac{7}{3}$ và $qp(y,x) = \frac{8}{3}$.

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\left\{\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3}.$$

Nếu $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ thì $qp(x,y) = \frac{8}{3}$ và $qp(y,x) = \frac{7}{3}$.

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\left\{\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{8}{3}.$$

Nếu $(x,y) = (0,1)$ thì

$qp(x,y) = 3$ và $qp(y,x) = 4$.

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\{3,4\} = 4.$$

Nếu $(x,y) = (1,0)$ thì

$qp(x,y) = 4$ và $qp(y,x) = 3$.

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\{4,3\} = 4.$$

Nếu $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ thì

$qp(x,y) = \frac{11}{3}$ và $qp(y,x) = \frac{13}{3}$.

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\left\{\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right\} = \frac{13}{3}.$$

Nếu $(x,y) = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ thì

$qp(x,y) = \frac{13}{3}$ và $qp(y,x) = \frac{11}{3}$.

Khi đó ta có

$$p(x,y) = max\{qp(x,y), qp(y,x)\} = max\left\{\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right\} = \frac{13}{3}.$$

Từ những tính toán trên ta có metric riêng p trong Định lí 2.2 được xác định bởi

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \frac{8}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right)\right\} \\ 4, & (x,y) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ \frac{13}{3}, & (x,y) \in \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}. \end{cases}$$

Ví dụ sau minh họa cho những kết quả đạt được phía trên đối với tựa metric riêng trong Ví dụ 2.5 trong tài liệu (Gharibi & Jahedi, 2019).

Ví dụ 2.4. Giả sử $X = \mathbb{R}$ và hàm

$$qp(x,y) = |x - y| + |x|.$$

Khi đó

1. qp là một tựa metric riêng trên X.

2. Metric d trong Định lí 2.1 được xác định như sau

$$d(x,y) = \begin{cases} |x - y| + |x| - |y|, & |x| > |y| \\ |y - x| + |y| - |x|, & |x| \le |y|. \end{cases}$$

3. Metric riêng p trong Định lí 2.2 được xác định như sau

$$p(x,y) = \begin{cases} |x - y| + |x|, & |x| > |y| \\ |y - x| + |y|, & |x| \le |y|. \end{cases}$$

Giải. (1). Theo Ví dụ 2.5 trong tài liệu (Gharibi & Jahedi, 2019) thì qp là một tựa metric riêng trên X.

(2). Giả sử $x, y \in X$. Ta có

$$qp(x,y) = |x-y| + |x|,$$
$$qp(y,x) = |y-x| + |y|,$$
$$qp(x,x) = |x|, qp(y,y) = |y|.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} d(x,y) &= max\{qp(x,y), qp(y,x)\} \\ &\quad - min\{qp(x,x), qp(y,y)\} \\ &= max\{|x-y| + |x|, |y-x| + |y|\} \\ &\quad - min\{|x|, |y|\} \\ &= \begin{cases} |x-y| + |x| - |y|, & |x| > |y| \\ |y-x| + |y| - |x|, & |x| \le |y|. \end{cases} \end{aligned}$$

(3). Ta có $qp(x,y) = |x-y| + |x|$ và $qp(y,x) = |y-x| + |y|$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} p(x,y) &= max\{qp(x,y), qp(y,x)\} \\ &= max\{|x-y| + |x|, |y-x| + |y|\} \\ &= \begin{cases} |x-y| + |x|, & |x| > |y| \\ |y-x| + |y|, & |x| \le |y|. \end{cases} \end{aligned}$$

Liên quan đến Định lí 2.1 và Định lí 2.2, chúng tôi đặt ra câu hỏi mở sau.

Câu hỏi 2.5. *Các chiều ngược lại trong Định lí 2.1. (2) và Định lí 2.2. (2), Định lí 2.2. (4) có xảy ra hay không?*

3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã xây dựng một metric và một metric riêng xuất phát từ một tựa metric riêng. Thiết lập và chứng minh mối quan hệ giữa dãy hội tụ, dãy Cauchy và tính đầy đủ của chúng. Đặc biệt,chúng tôi đã đưa ra một số ví dụ nhằm làm rõ kết quả chính. Kết quả bài viết có ý nghĩa khoa học và thực tiễn, là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên, học viên cao học và những ai đang quan tâm đến mảng nghiên cứu này.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp mã số SPD2020.02.02.

Tài liệu tham khảo

Chi, K. P., Karapınar, E., & Thanh, T. D. (2012). A generalized contraction principle in partial metric spaces. *Math. Comput. Modelling, 55*, 1673-1681.

Gharibi, R., & Jahedi, S. (2019). On the product of quasi-partial metric spaces. *Korean J. Math., 27*, 819-830.

Haghi, R. H., Rezapour, S., & Shahzad, N. (2013). Be careful on partial metric fixed point results. *Topology Appl. 160*, 450-454.

Karapınar, E., Erhan, İ. M., & Öztürk, A. (2013). Fixed point theorems on quasi-partial metric spaces. *Math. Comput. Modelling, 57*, 2442-2448.

Matthews, S. G. (1992). *Papers on general topology and applications*. Queen's College.

Nguyen, V. D. (2017). On the completion of partial metric spaces. *Quaest. Math., 40*, 589-597.

Trần, V. Â., Nguyễn, H. Q., Nguyễn, V. D., Nguyễn, N. B. (2017). *Giáo trình Topo đại cương*. Nhà xuất bản Trường Đại học Vinh.