ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG VỚI ĐIỀU KIỆN CO KIỂU PATA SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

• Bùi Thị Ngọc Hân(*), ThS. Nguyễn Trung Hiếu(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong bài báo [7] sang không gian b-mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lí điểm bất động cho điều kiện co mới. Đồng thời, chúng tôi suy ra một số hệ quả từ định lí và xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: *điểm bất động, không gian b-mêtric sắp thứ tự, điều kiện co kiểu Pata suy rộng.*

1. Mở đầu

Trong những năm gần đây, việc thiết lập những mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Bằng cách tổng quát khái niệm không gian mêtric, nhiều khái niệm không gian mêtric suy rộng đã được giới thiệu như không gian mêtric sắp thứ tự, không gian mêtric nón, không gian b-mêtric, không gian b-mêtric sắp thứ tự [2].

Bên cạnh việc đề xuất những không gian mêtric suy rộng, nhiều tác giả đã thiết lập những điều kiện co suy rộng [4]. Năm 2011, Pata [8] đã giới thiệu một điều kiện co suy rộng mới và được gọi là điều kiện co kiểu Pata, đồng thời, một số kết quả về điểm bất động của điều kiện co này cũng được thiết lập. Kể từ đó, những mở rộng của điều kiện co kiểu Pata trên không gian mêtric cũng như không gian mêtric suy rộng cũng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Năm 2014, Balasubramanian [3] đã thiết lập định lí điểm bất động cho ánh xạ kiểu Pata trong không gian mêtric nón đầy đủ, Eshaghi và cộng sự [6] cũng đã thiết lập một số kết quả điểm bất động kép cho điều kiện co kiểu Pata trong không gian mêtric đầy đủ sắp thứ tự, đồng thời, việc ước lượng tốc độ hội tụ của dãy lặp về điểm bất động kép cũng được giới thiệu, Kadelburg và cộng sự [7] đã khảo sát điểm bất động của điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong không gian mêtric sắp thứ tự.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả về điểm bất động của điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong không gian mêtric sắp thứ tự trong bài báo [7] sang không gian b-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi vận dụng định lí được thiết lập để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1 ([5])**.** Cho X là một tập hợp khác rỗng và $d : X \times X \to [0,\infty)$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x,y,z \in X$ và với $s \ge 1$,

(1) $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) \le s(d(x,z) + d(z,y))$.

Khi đó, ánh xạ d được gọi là một *b-mêtric* trên X và bộ (X,d,s) được gọi là một *không gian b-mêtric.*

Định nghĩa 1.2 ([5])**.** Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X,d,s) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Lưu ý rằng, mỗi mêtric là một ánh xạ liên tục. Tuy nhiên, điều này không đúng đối với b-mêtric [2]. Bổ đề sau được dùng để khắc phục tính không liên tục của b-mêtric trong những chứng minh ở phần sau.

Bổ đề 1.3 ([1], Lemma 1)**.** *Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric và hai dãy $\{x_n\},\{y_n\}$ lần lượt hội tụ đến x,y. Khi đó*

$$\frac{1}{s^2} d(x,y) \le \liminf_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \le \limsup_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \le s^2 d(x,y).$$

Đặc biệt, nếu $x = y$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Hơn nữa, với mọi $z \in X$, ta có

$$\frac{1}{s} d(x,z) \le \liminf_{n\to\infty} d(x_n,z) \le \limsup_{n\to\infty} d(x_n,z) \le s d(x,z).$$

(*) Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Bổ đề sau được sử dụng trong chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 1.4. *Với $\alpha \ge 1$, tồn tại hai số dương a, b thỏa mãn $(1+x)^\alpha \le ax^\alpha + b$ với mọi $x \ge 0$.*

Chứng minh. Xét $x \ge 1$, ta có $\left(\frac{x+1}{x}\right)^\alpha = \left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha \le 2^\alpha$. Suy ra $(1+x)^\alpha \le 2^\alpha x^\alpha$. Xét $0 \le x < 1$, áp dụng Định lí giá trị trung bình cho hàm số $f(t) = t^\alpha$ trên $[x, x+1]$, tồn tại $c \in (x, x+1)$ để $f(x+1) - f(x) = f'(c)$. Hay $(1+x)^\alpha - x^\alpha = \alpha c^{\alpha-1} < \alpha 2^{\alpha-1}$. Suy ra $(1+x)^\alpha < x^\alpha + \alpha 2^{\alpha-1}$. Chọn $a > 2^\alpha, b > \alpha 2^{\alpha-1}$, ta có $(1+x)^\alpha \le ax^\alpha + b$.

2. Các kết quả chính

Kí hiệu Ψ là tập hợp các hàm số $\psi : [0,1] \to [0,\infty)$ tăng và $\psi(0) = 0$. Định lí sau là một mở rộng của [7, Theorem 3.2] sang không gian b-mêtric sắp thứ tự.

Định lí 2.1. *Cho $(X, d, s, \preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T : X \to X$ là một ánh xạ tăng thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại x_0 sao cho $x_0 \preceq Tx_0$.

(2) Tồn tại $\alpha \ge 1, \beta \in [0, \alpha], \gamma \ge 0$ và hàm $\psi \in \Psi$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \le \frac{1-\varepsilon}{s^5} H_s(x, y) \tag{2.1}$$

$$+\gamma\varepsilon^\alpha \psi(\varepsilon)\left[1 + d(x, x_0) + d(y, x_0) + d(Tx, x_0) + d(Ty, x_0)\right]^\beta$$

với mọi $\varepsilon \in [0,1]$ và mọi $x, y \in X$ mà $x \preceq y$, trong đó

$$H_s(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2s}, \frac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2s}, d(T^2x,Tx), d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)\right\}.$$

(3) T liên tục hoặc $(X, d, s, \preceq)$ thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ thì $x_n \preceq x$ với mọi n.

Khi đó, $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = z \in X$ và z là điểm bất động của ánh xạ T.

Chứng minh. Với $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 \preceq Tx_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_{n+1} = Tx_n = T^n x_0$ với $n \in \mathbb{N}$. Do T là ánh xạ tăng nên

$$x_0 \preceq x_1 = Tx_0 \preceq Tx_1 = x_2 \preceq Tx_2 = x_3 \preceq Tx_3 = \ldots \preceq Tx_n = x_{n+1} \preceq \ldots$$

Do đó, $\{x_n\}$ là dãy tăng. Giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ thì $x_{n_0} = Tx_{n_0}$ hay x_{n_0} là điểm bất động của T. Do đó, ta giả sử $x_n \ne x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm. Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $d(x_{k-1}, x_k) \le d(x_k, x_{k+1})$. Khi đó, trong (2.1), thay x bởi x_{k-1}, y bởi x_k và đặt $K = \gamma\left[1 + d(x_{k-1}, x_0) + 2d(x_k, x_0) + d(x_{k+1}, x_0)\right]^\beta \ge 0$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &= d(Tx_{k-1}, Tx_k) \\ &\le \frac{1-\varepsilon}{s^5} H_s(x_{k-1}, x_k) + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon), \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} &H_s(x_{k-1}, x_k) \\ &= \max\left\{d(x_{k-1},x_k), d(x_{k-1},x_k), d(x_k,x_{k+1}), \frac{d(x_{k-1},x_{k+1})+d(x_k,x_k)}{2s}, \frac{d(x_{k+1},x_{k-1})+d(x_{k+1},x_{k+1})}{2s}, d(x_{k+1},x_k), d(x_{k+1},x_k), d(x_{k+1},x_{k+1})\right\} \\ &= \max\left\{d(x_{k-1},x_k), d(x_k,x_{k+1}), \frac{d(x_{k-1},x_{k+1})}{2s}\right\} = d(x_k,x_{k+1}). \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &\le \frac{1-\varepsilon}{s^2} d(x_k, x_{k+1}) + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \\ &\le (1-\varepsilon) d(x_k, x_{k+1}) + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Suy ra $\varepsilon d(x_{k-1}, x_k) \le K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \le K\varepsilon\psi(\varepsilon)$. Do đó $\varepsilon\left[d(x_{k-1}, x_k) - K\psi(\varepsilon)\right] \le 0$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Vì vậy $d(x_{k-1}, x_k) - K\psi(\varepsilon) \le 0$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Điều này dẫn đến $d(x_{k-1}, x_k) \le K\psi(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Cho $\varepsilon = 0$, ta được $d(x_{k-1}, x_k) \le K\psi(0) = 0$. Suy ra $d(x_{k-1}, x_k) = 0$. Điều này là một mâu thuẫn. Do đó, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm. Khi đó, tồn tại $d^* \ge 0$ để $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = d^*$. Đặt $c_n = d(x_n, x_0)$. Vì $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm nên

$$d(x_n, x_{n+1}) \le d(x_{n-1}, x_n) \le \ldots \le d(x_0, x_1) = c_1. \quad (2.2)$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(x_n, x_1) + d(x_0, x_{n+1}) &\le sd(x_n, x_0) + sd(x_0, x_1) \\ &\quad + sd(x_0, x_n) + sd(x_n, x_{n+1}) \\ &\le 2s(c_1 + c_n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_n) + d(x_{n+2}, x_1) &\le sd(x_{n+2}, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, x_n) + sd(x_{n+2}, x_{n+1}) \\ &\quad + s^2 d(x_{n+1}, x_n) + s^3 d(x_n, x_0) + s^3 d(x_0, x_1) \\ &\le (3s + s^2 + s^3)c_1 + s^3 c_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_0) &\le (s + s^2)c_1 + s^2 c_n, d(x_{n+2}, x_1) \\ &\le (s + s^2 + s^3)c_1 + s^3 c_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Từ (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) và (2.5), ta có

$$\begin{aligned} c_n &= d(x_n, x_0) \\ &\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_1) + s^2 d(x_1, x_0) \\ &\le (s + s^2)c_1 + s^2 d(Tx_n, Tx_0) \\ &\le (s + s^2)c_1 + s^2\left(\frac{1-\varepsilon}{s^5}\right)H_s(x_n, x_0) + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1 + d(x_n, x_0) + d(x_{n+1}, x_0) + d(x_1, x_0)\right]^\beta \\ &\le (s + s^2)c_1 + \frac{1-\varepsilon}{s^3}[(s + s^2 + s^3)c_1 + s^3 c_n] + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1 + (1+s)c_1 + (1+s)c_n\right]^\beta \\ &\le (1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + s + s^2)c_1 + (1-\varepsilon)c_n + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1 + (1+s)c_1\right]^\alpha\left[1 + \frac{1+s}{1+(1+s)c_1}c_n\right]^\alpha. \end{aligned}$$

Do đó

$$\varepsilon c_n \le (1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + s + s^2)c_1 + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1 + (1+s)c_1\right]^\alpha\left[1 + \frac{1+s}{1+(1+s)c_1}c_n\right]^\alpha.$$

Áp dụng Bổ đề 1.4, suy ra tồn tại hai số dương h, k sao cho

$$\varepsilon c_n \le h\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_n^\alpha + k. \quad (2.6)$$

Giả sử $\{c_n\}$ không bị chặn. Khi đó, tồn tại dãy con $c_{n_i} \to \infty$ thỏa mãn (2.6). Chọn $\varepsilon = \dfrac{1+k}{c_{n_i}}$, ta có $1 + k \le h\left(\dfrac{1+k}{c_{n_i}}\right)^\alpha \psi\left(\dfrac{1+k}{c_{n_i}}\right)c_{n_i}^\alpha + k.$

Điều này dẫn đến $1 \le h\left(1+k\right)^\alpha \psi\left(\dfrac{1+k}{c_{n_i}}\right)$. Vì $c_{n_i} \to \infty$ nên $1 \le h\left(1+k\right)^\alpha \psi\left(\dfrac{1+k}{c_{n_i}}\right) \to 0.$

Điều này là một mâu thuẫn. Vậy $\{c_n\}$ là dãy bị chặn. Mặt khác, từ (2.1), ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\le \frac{1-\varepsilon}{s^5}d(x_{n-1}, x_n) + \gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1 + d(x_{n-1}, x_0) + 2d(x_n, x_0) + d(x_{n+1}, x_0)\right]^\beta, \end{aligned}$$

Do $\{c_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M \ge 0$ sao cho $c_n \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó,

$$\left[1 + d(x_{n-1}, x_0) + 2d(x_n, x_0) + d(x_{n+1}, x_0)\right]^\beta \le (1 + 4M)^\beta.$$

Đặt $K = \gamma(1 + 4M)^\beta \ge 0$. Ta có

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \frac{1-\varepsilon}{s^5}d(x_{n-1}, x_n) + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon).$$

Cho $n \to \infty$, ta có

$$d^* \le \frac{1-\varepsilon}{s^5}d^* + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \le (1-\varepsilon)d^* + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon).$$

Suy ra $\varepsilon d^* \le K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \le K\varepsilon\psi(\varepsilon)$. Do đó, $\varepsilon\left[d^* - K\psi(\varepsilon)\right] \le 0$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Vì vậy $d^* - K\psi(\varepsilon) \le 0$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Điều này dẫn đến $d^* \le K\psi(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Cho $\varepsilon = 0$, ta có $d^* \le K\psi(0) = 0$. Vì vậy $d^* = 0$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Giả sử ngược lại $\{x_n\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\delta > 0$ và hai dãy con $\{x_{n(k)}\}, \{x_{m(k)}\}$ sao cho

$$m(k) \ge n(k) \ge k. \quad (2.7)$$

Với mỗi $k, n(k)$ ta giả sử $m(k)$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn (2.7) và

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \ge \delta. \quad (2.8)$$

Suy ra

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) < \delta. \quad (2.9)$$

Khi đó, từ (2.8) và (2.9) ta có

$$\begin{aligned} \delta &\le d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \\ &\le sd(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) + sd(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) \quad (2.10) \\ &< s\delta + sd(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}). \end{aligned}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.10), ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \le s\delta. \quad (2.11)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\delta \le d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \le sd(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + sd(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}). \quad (2.12)$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.12), ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}) \ge \frac{\delta}{s}. \quad (2.13)$$

Ta cũng có

$$d(x_{n(k)},x_{m(k)-1})\le sd(x_{n(k)},x_{m(k)})+sd(x_{m(k)},x_{m(k)-1}). \quad (2.14)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.14) và sử dụng (2.11), ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{n(k)},x_{m(k)-1})\le s^2\delta. \quad (2.15)$$

Tương tự, ta có

$$d(x_{m(k)-1},x_{n(k)+1})\le sd(x_{m(k)-1},x_{n(k)})+sd(x_{n(k)},x_{n(k)+1}). \quad (2.16)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.16) và sử dụng (2.15), ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1},x_{n(k)+1})\le s^2\delta. \quad (2.17)$$

Ta có

$$d(x_{n(k)+2},x_{m(k)})\le sd(x_{n(k)+2},x_{n(k)+1})+s^2d(x_{n(k)+1},x_{n(k)})+s^2d(x_{n(k)},x_{m(k)}). \quad (2.18)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.18) và sử dụng (2.11), ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{n(k)+2},x_{m(k)})\le s^3\delta. \quad (2.19)$$

Tương tự, ta cũng có

$$d(x_{n(k)+2},x_{m(k)-1})\le s^2d(x_{n(k)+2},x_{n(k)+1})+s^2d(x_{n(k)+1},x_{n(k)})+sd(x_{n(k)},x_{m(k)-1}). \quad (2.20)$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.20), ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{n(k)+2},x_{m(k)-1})\le s^3\delta. \quad (2.21)$$

Mặt khác, trong (2.1), thay x bởi $x_{n(k)}$ và y bởi $x_{m(k)-1}$, ta có

$$d(Tx_{n(k)},Tx_{m(k)-1})\le \frac{1-\varepsilon}{s^5}H_s(x_{n(k)},x_{m(k)-1})$$
$$+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x_{n(k)},x_0)+d(x_{m(k)-1},x_0)+d(x_{n(k)+1},x_0)+d(x_{m(k)},x_0)\right]^\beta.$$

Do $\{c_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M\ge 0$ sao cho $c_n\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Do đó

$$\left[1+d(x_{n(k)},x_0)+d(x_{m(k)-1},x_0)+d(x_{n(k)+1},x_0)+d(x_{m(k)},x_0)\right]^\beta\le(1+4M)^\beta.$$

Đặt $K=s\gamma(1+4M)^\beta>0$. Khi đó

$$d(x_{n(k)+1},x_{m(k)})\le \frac{1-\varepsilon}{s^5}H_s(x_{n(k)},x_{m(k)-1})+\frac{K}{s}\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon), \quad (2.22)$$

trong đó

$$H_s(x_{n(k)},x_{m(k)-1})=\max\Big\{d(x_{n(k)},x_{m(k)-1}),d(x_{n(k)},x_{n(k)+1}),d(x_{m(k)-1},x_{m(k)}),$$
$$\frac{d(x_{n(k)},x_{m(k)})+d(x_{m(k)-1},x_{n(k)+1})}{2s},\frac{d(x_{n(k)+2},x_{n(k)})+d(x_{n(k)+2},x_{m(k)})}{2s},$$
$$d(x_{n(k)+2},x_{n(k)+1}),d(x_{n(k)+2},x_{m(k)-1}),d(x_{n(k)+2},x_{m(k)})\Big\}.$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.22), sử dụng (2.11), (2.15), (2.17), (2.19) và (2.21), ta được

$$\frac{\delta}{s}\le\frac{1-\varepsilon}{s^5}\max\left\{s\delta,0,0,\frac{s\delta+s^3\delta}{2s},\frac{0+s^3\delta}{2s},0,s^3\delta,s^3\delta\right\}+\frac{K}{s}\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)$$
$$=\frac{1-\varepsilon}{s^2}\delta+\frac{K}{s}\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\le\frac{1-\varepsilon}{s}\delta+\frac{K}{s}\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon).$$

Suy ra $\varepsilon\delta\le K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\le K\varepsilon\psi(\varepsilon)$. Do đó, $\varepsilon\left[\delta-K\psi(\varepsilon)\right]\le 0$ với mọi $\varepsilon\in[0,1]$. Vì vậy $\delta-K\psi(\varepsilon)\le 0$ với mọi $\varepsilon\in[0,1]$. Điều này dẫn đến $\delta\le K\psi(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon\in[0,1]$. Cho $\varepsilon=0$, ta có $\delta\le K\psi(0)=0$. Suy ra $\delta=0$. Điều này là một mâu thuẫn. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do (X,d,s) là không gian b-mêtric đầy đủ nên tồn tại $z\in X$ để $\lim_{n\to\infty}x_n=z$. Điều này dẫn đến $\lim_{n\to\infty}T^nx_0=z$.

Giả sử T là ánh xạ liên tục. Khi đó, $z=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}Tx_n=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=Tz$ hay z là điểm bất động của T.

Giả sử giả thiết (H) được thỏa mãn. Do $\{x_n\}$ là dãy tăng và $\lim_{n\to\infty}x_n=z$ nên $x_n\preceq z$. Do đó, trong (2.1), thay x bởi x_n và y bởi z, ta được

$$d(x_{n+1},Tz)=d(Tx_n,Tz)$$
$$\le\frac{1-\varepsilon}{s^5}H_s(x_n,z)$$
$$+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x_n,x_0)+d(z,x_0)+d(x_{n+1},x_0)+d(Tz,x_0)\right]^\beta, \quad (2.23)$$

trong đó

$$H_s(x_n,z)=\max\Big\{d(x_n,z),d(x_n,x_{n+1}),d(z,Tz),\frac{d(x_n,Tz)+d(z,x_{n+1})}{2s},$$
$$\frac{d(x_{n+2},x)+d(x_{n+2},Tz)}{2s},d(x_{n+2},x_{n+1}),d(x_{n+2},z),d(x_{n+2},Tz)\Big\}.$$

Cho $n\to\infty$ trong (2.23) và sử dụng Bổ đề 1.3, ta có

$$\frac{1}{s}d(z,Tz)\le\frac{1-\varepsilon}{s^5}sd(z,Tz)+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+2sd(z,x_0)+d(z,x_0)+d(z,Tz)\right]^\beta$$
$$\le\frac{1-\varepsilon}{s}d(z,Tz)+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+2sd(z,x_0)+d(z,x_0)+d(z,Tz)\right]^\beta.$$

Suy ra $\varepsilon d(z,Tz)\le N\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)$ với

$$N=s\gamma\left[1+2sd(z,x_0)+d(z,x_0)+d(z,Tz)\right]^\beta>0.$$

Điều này dẫn đến $d(z,Tz)\le N\psi(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon\in[0,1]$. Cho $\varepsilon=0$, ta có $d(z,Tz)\le N\psi(0)=0$.

Suy ra $d(z,Tz)=0$. Vì vậy $Tz=z$ hay z là điểm bất động của T.

Định lí sau thiết lập điều kiện đủ cho sự tồn tại duy nhất điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong không gian b-mêtric sắp thứ tự đầy đủ.

Định lí 2.2. *Cho $(X,d,s,\preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T:X\to X$ là một ánh xạ tăng sao cho:*

(1) Các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn.

(2) Với mọi u,v là điểm bất động của T, tồn tại $w\in X$ sao cho w so sánh được với u,v và $w\preceq Tw$.

Khi đó, T có điểm bất động duy nhất.

Chứng minh. Theo chứng minh của Định lí 2.1, T có điểm bất động. Giả sử u,v là hai điểm bất động của T. Khi đó, tồn tại $w\in X$ sao cho w so sánh được với u,v và $w\preceq Tw$. Do $w\preceq Tw$ nên bằng cách xem w là x_0 trong Định lí 2.1, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}T^nw=z$. Ta sẽ chứng minh $u=v=z$.

Trước hết, ta chứng minh $u=z$. Giả sử $w\preceq u$. Do T là hàm tăng nên $Tw\preceq Tu$ và do đó $T^2w\preceq T^2u$. Tiếp tục quá trình này, ta được $T^nw\preceq T^nu$ với $n\geq 1$. Do đó, từ (2.1), ta có

$$\begin{aligned}d(u,T^nw)&=d(TT^{n-1}u,TT^{n-1}w)\\&\leq\frac{1-\varepsilon}{s^5}H_s(T^{n-1}u,T^{n-1}w)\\&\quad+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\big[1+d(T^{n-1}u,x_0)+d(T^{n-1}w,x_0)+d(T^nu,x_0)+d(T^nw,x_0)\big]^\beta,\end{aligned}\quad(2.24)$$

trong đó

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}H_s(T^{n-1}u,T^{n-1}w)\\&\leq\max\left\{d(u,T^{n-1}w),d(T^{n-1}w,T^nw),\frac{d(T^{n-1}w,T^nw)}{2s^2},\frac{d(u,T^nw)}{2s},d(u,T^nw)\right\}.\end{aligned}\quad(2.25)$$

Cho $n\to\infty$ trong (2.25) và sử dụng Bổ đề 1.3, ta được

$$\begin{aligned}H_s(T^{n-1}u,T^{n-1}w)&=\max\left\{sd(u,z),d(z,z),\frac{d(z,z)}{2s^2},\frac{d(u,z)}{2s},sd(u,z)\right\}\\&=sd(u,z).\end{aligned}\quad(2.26)$$

Cho $n\to\infty$ trong (2.24), sử dụng (2.26) và Bổ đề 1.3, ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}d(u,z)&\leq\frac{1-\varepsilon}{s^5}sd(u,z)+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\big[1+2d(u,x_0)+2sd(z,x_0)\big]^\beta\\&\leq\frac{1-\varepsilon}{s}d(u,z)+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\big[1+2d(u,x_0)+2sd(z,x_0)\big]^\beta.\end{aligned}$$

Suy ra với $N=s\gamma\big[1+2d(u,x_0)+2sd(z,x_0)\big]^\beta>0$ thì $\varepsilon d(u,z)\leq N\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)$. Điều này dẫn đến $d(u,z)\leq N\psi(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon\in[0,1]$. Cho $\varepsilon=0$, ta có $d(u,z)\leq N\psi(0)=0$. Suy ra $d(u,z)=0$ hay $u=z$.

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được $v=z$. Vậy $u=v$.

Trong Định lí 2.1 bằng cách thay $H_s(x,y)$ bởi $M_s(x,y)\leq H_s(x,y)$, chúng tôi nhận được hệ quả sau. Hệ quả này là một mở rộng của [7, Theorem 3.2] sang không gian b-mêtric.

Hệ quả 2.3. *Cho $(X,d,s,\preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T:X\to X$ là một ánh xạ tăng thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại x_0 sao cho $x_0\preceq Tx_0$.

(2) Tồn tại $\alpha\geq 1,\beta\in[0,\alpha],\gamma\geq 0$ và hàm $\psi\in\Psi$ sao cho

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&\leq\frac{1-\varepsilon}{s^5}M_s(x,y)\\&\quad+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\big[1+d(x,x_0)+d(y,x_0)+d(Tx,x_0)+d(Ty,x_0)\big]^\beta\end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon\in[0,1]$ và mọi $x,y\in X$ mà $x\preceq y$, trong đó

$$M_s(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2s}\right\}.$$

(3) T liên tục hoặc $(X,d,s,\preceq)$ thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X$ thì $x_n\preceq x$ với mọi n.

Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty}T^nx_0=z\in X$ và z là điểm bất động của ánh xạ T.

Vì mỗi mêtric là một b-mêtric với $s=1$ nên từ Định lí 2.1 ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.4. *Cho $(X,d,\preceq)$ là một không gian mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $T:X\to X$ là một ánh xạ tăng thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại x_0 sao cho $x_0\preceq Tx_0$.

(2) Tồn tại $\alpha\geq 1,\beta\in[0,\alpha],\gamma\geq 0$ và hàm $\psi\in\Psi$ sao cho

$$d(Tx,Ty)\leq(1-\varepsilon)H(x,y)+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\big[1+d(x,x_0)+d(y,x_0)+d(Tx,x_0)+d(Ty,x_0)\big]^\beta$$

với mọi $\varepsilon\in[0,1]$ và mọi $x,y\in X$ mà $x\preceq y$, trong đó

$$H(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}, \frac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2}, d(T^2x,Tx), d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)\right\}.$$

(3) T liên tục hoặc $(X,d,s,\preceq)$ thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ thì $x_n \preceq x$ với mọi n. □

Khi đó, $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = z \in X$ và z là điểm bất động của ánh xạ T.

Nhận xét 2.5. Vì mỗi mêtric là một b-mêtric với $s=1$ nên từ Hệ quả 2.3 ta nhận được [7, Theorem 3.2].

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra ví dụ minh họa cho sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ T thỏa mãn giả thiết Định lí 2.1 và chứng tỏ rằng Định lí 2.1 là một sự tổng quát của Hệ quả 2.3.

Ví dụ 2.6. Cho $X=\{1,2,3,4,5\}$ với thứ tự thông thường $\leq$ trên $\mathbb{R}$ và ánh xạ $d: X\times X \to [0,\infty)$ xác định bởi

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ nếu } x=y \\ 1 \text{ nếu } (x,y)\in\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\} \\ 2 \text{ nếu } (x,y)\in\{(2,3),(3,2)\} \\ 38 \text{ nếu } (x,y)\in\{(1,4),(4,1),(1,5),(5,1)\} \\ 18 \text{ trường hợp còn lại.}\end{cases}$$

Khi đó, $(X,d,s,\preceq)$ là không gian b-mêtric sắp thứ tự đầy đủ với $s=2$. Xét ánh xạ $T: X\to X$ xác định bởi $T1=T2=T3=T4=1$, $T5=3$. Chọn $x_0=1$, ta có $x_0 \leq Tx_0$. Chọn $\alpha=\beta=\gamma=1$ và $\psi(t)=t$ với mọi $t\in[0,1]$. Lấy $\varepsilon=0$, $(x,y)=(2,5)$, ta có

$$\frac{1-\varepsilon}{2^5}M_s(x,y)+\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x,x_0)+d(y,x_0)+d(Tx,x_0)+d(Ty,x_0)\right]^\beta$$
$$=\frac{18}{2^5}<1=d(Tx,Ty).$$

Suy ra điều kiện (2) trong Hệ quả 2.3 không thỏa mãn. Do đó, Hệ quả 2.3 không áp dụng được cho ánh xạ T.

Đặt

$$VP=\frac{1-\varepsilon}{2^5}H_s(x,y) +\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x,x_0)+d(y,x_0)+d(Tx,x_0)+d(Ty,x_0)\right]^\beta.$$

Khi đó, với mọi $(x,y)\in X\times X$ mà $x\leq y$ và với mọi $\varepsilon\in[0,1]$, ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $x=y$ hoặc $(x,y)\in\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Khi đó $d(Tx,Ty)=0$.

Trường hợp 2. $(x,y)=(1,5)$. Khi đó

$$d(Tx,Ty)=1, VP=\frac{9}{8}+\left(\frac{1}{4}-\frac{19\varepsilon}{8}\right)^2+\frac{2199\varepsilon^2}{64}.$$

Trường hợp 3. $(x,y)\in\{(2,5),(3,5)\}$. Khi đó:

$$d(Tx,Ty)=1, VP=\frac{9}{8}+\left(\frac{1}{4}-\frac{19\varepsilon}{8}\right)^2+\frac{2263\varepsilon^2}{64}.$$

Trường hợp 4. $(x,y)=(4,5)$. Khi đó

$$d(Tx,Ty)=1, VP=\frac{9}{8}+\left(\frac{1}{4}-\frac{19\varepsilon}{8}\right)^2+\frac{4631\varepsilon^2}{64}.$$

Như vậy, từ các trường hợp trên, ta suy ra điều kiện (2) của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Hơn nữa, T là ánh xạ tăng và liên tục. Do đó, các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Vì vậy, Định lí 2.1 áp dụng được cho T.

Cuối cùng, chúng tôi sử dụng Định lí 2.1 để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến.

Hệ quả 2.7. *Cho $C[a,b]$ là tập hợp các hàm số liên tục trên $[a,b]$, quan hệ thứ tự trên $C[a,b]$ xác định bởi: $x\preceq y$ nếu $x(t)\leq y(t)$ với mọi $t\in[a,b]$ và b-mêtric d với $s=2^{p-1}$ trên $C[a,b]$ xác định bởi $d(x,y)=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|^p$ với mọi $x,y\in C[a,b]$ và với $p>1$. Xét phương trình tích phân phi tuyến*

$$x(t)=g(t)+\int_a^b K(t,s,x(s))ds, \qquad (2.27)$$

trong đó $t\in[a,b]$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $K:[a,b]\times[a,b]\times x([a,b])\to\mathbb{R}$ với mỗi $x\in C[a,b]$ là các hàm số cho trước. Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn:

(H1) g là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và mỗi $t\in[a,b]$, $x\in C[a,b]$ sao cho $K(t,s,x(s))$ khả tích theo biến s trên $[a,b]$.

(H2) $Tx \in C[a,b]$ *với* $x \in C[a,b]$, *trong đó* $Tx(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s,x(s))ds$ *với* $t \in [a,b]$.

(H3) Với $t \in [a,b], x, y \in C[a,b]$ *mà* $x(u) \le y(u)$ *với mọi* $u \in [a,b]$, *ta có*

$$K(t,s,x(s)) \le K(t,s,y(s)).$$

(H4) Tồn tại $x_0 \in C[a,b]$ *sao cho* $x_0(t) \le g(t) + \int_a^b K(t,s,x_0(s))ds$ *với mọi* $t \in [a,b]$.

(H5) Với $t, s \in [a,b]$ *và* $x, y \in C[a,b]$ *sao cho* $x(u) \preceq y(u)$ *với mọi* $u \in [a,b]$, *tồn tại hằng số* $\alpha \ge 1$ *và* $\beta \in [0,\alpha]$ *sao cho*

$$\begin{aligned}&\left|K(t,s,x(t)) - K(t,s,y(t))\right|^p \\ &\le \xi(t,s)(1-\varepsilon)\max\Big\{\left|x(t)-y(t)\right|^p, \left|x(t)-Tx(t)\right|^p, \left|y(t)-Ty(t)\right|^p, \\ &\frac{\left|x(t)-Ty(t)\right|^p + \left|y(t)-Tx(t)\right|^p}{2^p}, \frac{\left|T^2x(t)-x(t)\right|^p + \left|T^2x(t)-Ty(t)\right|^p}{2^p}, \\ &\left|T^2x(t)-Tx(t)\right|^p, \left|T^2x(t)-y(t)\right|^p, \left|T^2x(t)-Ty(t)\right|^p\Big\} \\ &+\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+\left|x(t)-x_0(t)\right|^p + \left|y(t)-x_0(t)\right|^p + \left|Tx(t)-x_0(t)\right|^p + \left|Ty(t)-x_0(t)\right|^p\right]^\beta\end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon \in [0,1]$, *trong đó* $\xi : [a,b]\times[a,b] \to [0,\infty)$ *là hàm liên tục thỏa mãn*

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b \xi(s,t)ds \le \frac{1}{2^{5p-5}(b-a)^{p-1}}.$$

Khi đó, phương trình tích phân phi tuyến (2.27) có nghiệm $x \in C[a,b]$.

Chứng minh. Xét ánh xạ $T : C[a,b] \to C[a,b]$ xác định bởi $Tx(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s,x(s))ds$ với mọi $t \in [a,b]$ và $x \in C[a,b]$. Khi đó, sự xác định của ánh xạ T được suy ra từ giả thiết (H1) và (H2). Hơn nữa, sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ T dẫn đến sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân (2.27). Do đó, ta sẽ chứng minh rằng ánh xạ T thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.1.

(1) Với $x, y \in C[a,b]$ mà $x \preceq y$, ta có $x(s) \le y(s)$ với mọi $s \in [a,b]$. Do đó, từ giả thiết (H3), với mọi $t \in [a,b]$, ta có

$$Tx(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s,x(s))ds \le g(t) + \int_a^b K(t,s,y(s))ds \le Ty(t).$$

Suy ra $Tx \preceq Ty$ hay T là ánh xạ tăng.

(2) Từ giả thiết (H4), ta suy ra tồn tại $x_0 \in C[a,b]$ sao cho $x_0 \preceq Tx_0$.

(3) Lấy $q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Từ giả thiết (H5), ta có

$$\begin{aligned}&|Tx(t)-Ty(t)|^p \le \left(\int_a^b \left|K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))\right| ds\right)^p \\ &\le \left[\left(\int_a^b ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \left|K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\ &\le (b-a)^{p-1}\Bigg[\int_a^b \xi(t,s)(1-\varepsilon)\Big(\max\Big\{\left|x(t)-y(t)\right|^p, \\ &\left|x(t)-Tx(t)\right|^p, \left|y(t)-Ty(t)\right|^p, \frac{\left|x(t)-Ty(t)\right|^p + \left|y(t)-Tx(t)\right|^p}{2^p}, \\ &\frac{\left|T^2x(t)-x(t)\right|^p + \left|T^2x(t)-Ty(t)\right|^p}{2^p}, \left|T^2x(t)-Tx(t)\right|^p, \\ &\left|T^2x(t)-y(t)\right|^p, \left|T^2x(t)-Ty(t)\right|^p\Big\}\Big)ds \\ &+\int_a^b \varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+\left|x(t)-x_0(t)\right|^p + \left|y(t)-x_0(t)\right|^p + \left|Tx(t)-x_0(t)\right|^p + \left|Ty(t)-x_0(t)\right|^p\right]^\beta ds \\ &\le (1-\varepsilon)(b-a)^{p-1} H_s(x,y) \int_a^b \xi(t,s)ds \\ &+(b-a)^p\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x,x_0)+d(y,x_0)+d(Tx,x_0)+d(Ty,x_0)\right]^\beta \\ &\le \frac{1-\varepsilon}{2^{5p-5}} H_s(x,y) \\ &+(b-a)^p\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x,x_0)+d(y,x_0)+d(Tx,x_0)+d(Ty,x_0)\right]^\beta.\end{aligned}$$

Do đó, điều kiện (2.1) thỏa mãn với $\gamma = (b-a)^p \ge 0$.

(4) $C[a,b]$ là không gian b-mêtric đầy đủ với b-mêtric d đã chọn. Hơn nữa, giả sử $\{x_n\}$ là dãy tăng trong $C[a,b]$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Khi đó, với mỗi $t \in [a,b]$, ta có $x_1(t) \le x_2(t) \le \ldots \le x_n(t) \le \ldots$ và $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Do đó, với mỗi $t \in [a,b]$, ta có $x_n(t) \le x(t)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra $x_n \preceq x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vậy giả thiết (H) trong Định lí 2.1 được thỏa mãn.

Như vậy, các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Do đó, ánh xạ T có điểm bất động $x \in C[a,b]$. Vì vậy, phương trình tích phân phi tuyến (2.27) có nghiệm $x \in C[a,b]$.

Tài liệu tham khảo

[1]. A. Aghajani, M. Abbas, and J. R. Roshan (2014), "Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces", *Math. Slovaca*, 64 (4), p. 941-960.

[2]. T. V. An, N. V. Dung, Z. Kadelburg, and S. Radenovic (2015), "Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems", *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, (109), p. 175-198.

[3]. S. Balasubramanian (2014), "A Pata-type fixed point theorem", *Math. Sci.*, p. 1-5.

[4]. P. Collaco and J. C. E. Silva (1997), "A complete comparison of 25 contraction conditions", *Nonlinear Anal.*, 30 (1), p. 471-476.

[5]. S. Czerwik (1998), "Nonlinear set-valued contraction mappings in b -metric spaces", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46 (2), p. 263-276.

[6]. M. Eshaghi, S. Mohseni, M. R. Delavar, M. D. L. Sen, G. H. Kim, and A. Arian (2014), "Pata contractions and coupled type fixed point", *Fixed Point Theory Appl.*, (2014:130), p. 1-10.

[7]. Z. Kadelburg and S. Radennovic (2014), "Fixed point and tripled fixed point theorems under Pata-type conditions in ordered metric paces", *Int. J. Anal. Appl.*, 6 (1), p. 113-122.

[8]. V. Pata (2011), "A fixed point theorem in metric spaces", *J. Fixed Point Theory Appl.*, (10), p. 299-305.

FIXED POINT THEOREMS FOR GENERALIZED PATA-TYPE CONTRACTIONS IN PARTIALLY ORDERED b -METRIC SPACES

Summary

In this paper, we extend the generalized Pata-type contraction mentioned in [7] to partially ordered b-metric spaces and state certain fixed point theorems for new contractions. We also come up with some corollaries and provide relevant examples.

Keywords: fixed point, partially ordered b-metric spaces, generalized Pata-type contractions.

Ngày nhận bài: 05/01/2016; Ngày nhận lại: 07/3/2016, Ngày duyệt đăng: 04/4/2016.