ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT THỎA MÃN TÍNH HERMITE

• Vũ Nhân Khánh(*), ThS. Ngô Tấn Phúc(**)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một điều kiện cần để đại số đường đi Leavitt của một đồ thị hữu hạn với hệ số trên trường là vành Hermite. Ngoài ra, chúng tôi cũng giới thiệu một số ví dụ về lớp đại số này.

Từ khóa: Đại số đường đi Leavitt, vành Hermite.

1. Mở đầu

Trong bài báo này, ta ký hiệu E là một đồ thị hữu hạn, K là một trường tùy ý. Đại số đường đi Leavitt của E với hệ tử trên K, ký hiệu $L_K(E)$, là cấu trúc đại số được giới thiệu năm 2005 bởi G. Abrams và G. Aranda Pino trong [1]. Trong suốt thập kỷ qua, cấu trúc đại số này luôn nhận được sự quan tâm đặc biệt của những chuyên gia về Lý thuyết vành. Lý do là, Lý thuyết vành vốn rất thiếu các ví dụ trực quan, trong khi với đại số đường đi Leavitt ta có thể dễ dàng phân biệt các cấu trúc vành thông qua các đặc trưng đồ thị. Nói cách khác, ta có thể dùng vài nét vẽ đồ thị hết sức trực quan để phân biệt các cấu trúc vành phức tạp.

Một trong những hướng nghiên cứu chủ yếu về đại số đường đi Leavitt là thiết lập mối liên hệ một đối một giữa một bên là các tính chất (đồ thị) của E và một bên là các tính chất (vành, môđun, đại số) của $L_K(E)$. Đó cũng là hướng tiếp cận vấn đề của bài báo này. Mục tiêu của chúng tôi là tìm đặc trưng đồ thị của E để $L_K(E)$ là vành Hermite.

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả liên quan đến nội dung chính. Các ký hiệu trong phần này chúng tôi dựa vào [1], [2], [3] và [4].

Một đồ thị $E=(E^0,E^1,s,r)$ là một bộ bao gồm hai tập hợp E^0,E^1 và hai ánh xạ $r,s:E^0\to E^1$. Các phần tử của E^0 được gọi là các *đỉnh* (vertices) và các phần tử của E^1 được gọi là các *cạnh* (edges). Đối với bất kì cạnh e trong $E^1, s(e)$ được gọi là *gốc* (source) của e và $r(e)$ được gọi là *ngọn* (range) của e. Đồ thị $E=(E^0,E^1,s,r)$ được gọi là *hữu hạn* nếu các tập E^0 và E^1 là các tập hữu hạn phần tử.

Nếu $s(e)=v$ và $r(e)=w$ thì ta nói rằng v *phát ra* (emits) e và w *nhận vào* e. Nếu $r(e_1)=s(e_2)$ với $e_1,e_2\in E^1$ thì ta nói rằng e_1 và e_2 là *kề nhau* (adjacent). Với mỗi cạnh e trong E^1 ta gọi e là *cạnh thực*, kí hiệu e^* là cạnh tương ứng với e và gọi e^* là *cạnh ảo*. Tập hợp các cạnh ảo kí hiệu là $(E^1)^*$. Vậy $(E^1)^*=\{e^*\mid e\in E^1\}$.

Một *đường đi* (path) p trong một đồ thị E là chuỗi các cạnh

$$p=e_1e_2...e_n$$

sao cho $r(e_i)=s(e_{i+1})$ với mọi $i=1,2,...,n-1$. Một đường đi gồm n cạnh được gọi là *có độ dài* n và chúng ta viết $l(p)=n$.

Ta kí hiệu tập hợp của tất cả các đường đi trong E bởi E^*. Đối với một đường đi $p=e_1...e_n\in E^*$ ta định nghĩa p^0 là *tập của tất cả các đỉnh trong* p, nghĩa là

$$p^0=\{s(e_i),r(e_i):i=1,2,...\}.$$

Hơn nữa, nếu $q=e_1...e_m$ với $m\le n$ thì ta nói rằng q là một đoạn đầu của p.

Một đường đi được gọi là một *chu trình* (cycle) nếu $s(p)=r(p)$ và $s(e_i)\ne s(e_j)$ đối với mọi $i\ne j$. Nói cách khác, một chu trình là một đường đi mà bắt đầu và kết thúc trên cùng một đỉnh và không đi qua bất kì đỉnh nào quá một lần. Nếu một đồ thị E không chứa bất kì một chu kì nào, nó được gọi là *đồ thị không có chu trình* (acyclic graph).

(*) Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.
(**) Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.

Một cạnh $e \in E^1$ được cho là một *lối ra* (exit) của đường đi $p = e_1 ... e_n$ nếu tồn tại một $i \in \{1,...,n\}$ sao cho $s(e) = s(e_i)$ nhưng $e \neq e_i$. Nếu đồ thị E chứa các chu trình mà mọi chu trình đều không có lối ra thì E được gọi là *đồ thị không có lối ra* (no-exit graph).

Trong đồ thị E, một đỉnh v được gọi là *sink* nếu như $s^{-1}(v) = \varnothing$, nếu v không phải là sink thì được gọi là đỉnh *chính quy* (regular).

Định nghĩa 1.1 ([1, Definition 1.3]). Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là một đồ thị và K là một trường bất kỳ. *Đại số đường đi Leavitt của đồ thị E với hệ số trên trường K*, kí hiệu $L_K(E)$, là K- đại số phổ dụng với tập sinh là các bộ E^0, E^1 và $(E^1)^*$ và tập quan hệ sau đây:

(A1) $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ đối với mọi $v_i, v_j \in E^0$ (δ_{ij} là kí hiệu Kronecker);

(A2) $s(e)e = e = er(e)$ và $r(e)e^* = e^* = es(e)^*$ với mọi $e \in E^1$;

(CK1) $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$ với mọi $e_i, e_j \in E^1$;

(CK2) $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*$ với mọi $v \in E^0$.

Với mỗi vành R, ta kí hiệu $V(R)$ là nửa nhóm Aben của các lớp mô đun xạ ảnh hữu hạn sinh với phép toán là $\oplus$. Nếu P là một mô đun xạ ảnh hữu hạn sinh thì ta kí hiệu phần tử của $V(R)$ chứa P là $[P]$.

Theo [5] với mỗi đồ thị E ta định nghĩa nửa nhóm M_E như sau. Ta kí hiệu T là nửa nhóm tự do giao hoán (viết theo lối cộng) với tập sinh là E^0. Định nghĩa quan hệ trên T như sau

$$(M) \qquad v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} r(e)$$

với mọi đỉnh chính quy $v \in E^0$. Kí hiệu $\sim_E$ là *quan hệ tương đẳng* trên T sinh ra bởi quan hệ (M) ở trên. Khi đó $M_E = T / \sim_E$ và ta có thể kí hiệu các phần tử của M_E là $[x]$, với $x \in T$. Hai phần tử $x = \sum_{v \in E^0} n_v v$ và $y = \sum_{v \in E^0} m_v v$ được gọi là *bằng nhau* trong M_E nếu ta có thể áp dụng quan hệ (M) cho các đỉnh trong x và y (với số lần có thể khác nhau) để đến một bước nào đó, hệ số của các đỉnh tương ứng trong x và y là như nhau.

Trong [5], các tác giả đã chứng minh rằng:

Định lý 1.2 [5, Theorem 3.5]. *Cho E là một đồ thị và K là một trường bất kì. Khi đó ánh xạ $[v] \mapsto [vL_K(E)]$ là một đẳng cấu nửa nhóm từ M_E đến $V(L_K(E))$. Đặc biệt, với đẳng cấu này, ta có $\left[\sum_{v \in E^0} v\right] \mapsto [L_K(E)]$.*

Theo [7], *vành Hermite* là một vành thỏa mãn tính IBN và mọi môđun ổn định tự do đều là tự do. Ta có đặc trưng sau đây cho vành Hermite.

Định lý 1.3 [7, Corollary 0.4.2]. *Vành R là vành Hermite nếu với mọi số tự nhiên m, n, với mọi R-môđun Q, $R^n \cong R^m \oplus Q$ kéo theo $n \geq m$ và Q là một R-môđun tự do với số chiều là $n - m$.*

2. Kết quả chính

Trong [1] các tác giả đã chỉ ra rằng để $L_K(E)$ là vành đơn thì đặc trưng đồ thị của E là mọi chu trình đều phải có lối ra. Ở đây, chúng tôi muốn khảo sát trường hợp đối ngẫu với đặc trưng đồ thị đó. Kết quả chính mà chúng tôi thu được là nếu $L_K(E)$ là vành Hermite thì E là đồ thị không có lối ra.

Trước tiên, chúng tôi đưa ra một tiêu chuẩn để $L_K(E)$ là vành Hermite.

Bổ đề 2.1. *Cho $E = (E^0, E^1, s, r)$ là đồ thị hữu hạn có*

$$E^0 = \{v_1, v_2, ..., v_h\}$$

và K là một trường bất kỳ. Khi đó $L_K(E)$ là vành Hermite nếu và chỉ nếu với mọi $x = \sum_{i=1}^{h} n_i v_i$,

$$m\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] + [x] = n\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right]$$

kéo theo $n \geq m$ và $x = (n-m)\sum_{i=1}^{h} v_i$.

Chứng minh. Theo Định lý 1.2, ta có thể đồng nhất $\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right]$ với $\left[L_K(E)\right]$ trong M_E.

Nhắc lại rằng $L_K(E)$ là vành Hermite nếu và chỉ nếu với mọi $L_K(E)$-môđun Q,

$$(L_K(E))^m \oplus Q \cong (L_K(E))^n$$

kéo theo $n \geq m$ và Q là một $L_K(E)$-môđun tự do với số chiều là $n-m$. Vì Q là một $L_K(E)$-môđun tự do nên Q phải có dạng:

$$Q = \left\{\sum_{i=1}^{h} n_i v_i \mid v_i \in E^0,\, n_i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Mặt khác, trong M_E

$$\left[(L_K(E))^m\right] = \underbrace{\left[L_K(E) \oplus L_K(E) \oplus .... \oplus L_K(E)\right]}_{m}$$

$$= \underbrace{\left[L_K(E) + L_K(E) + ... + L_K(E)\right]}_{m}$$

$$= m\left[L_K(E)\right]$$

$$= m\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right].$$

Vậy, để $(L_K(E))^m \oplus Q \cong (L_K(E))^n$ thì trong M_E ta phải có

$$m\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] + \left[\sum_{i=1}^{h} n_i v_i\right] = n\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right].$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Với tiêu chuẩn kiểm tra tính Hermite của $L_K(E)$ ở Bổ đề 2.1, chúng tôi thu được kết quả chính là Định lý 2.2 và một số ví dụ về lớp đồ thị mà đại số đường đi Leavitt của chúng là một vành Hermite.

Định lý 2.2. *Cho E là một đồ thị hữu hạn và K là một trường tùy ý. Khi đó nếu đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ của E với hệ tử trên K là một vành Hermite thì E là đồ thị không có lối ra.*

Chứng minh. Giả sử E là một đồ thị chứa chu trình

$$c = e_1 .... e_n$$

trong đó e_{n+1} là một lối ra của c $(n < h-1)$.

Gọi $v_i = s(e_i)\left(i = \overline{1,n}\right)$ và $v_{n+1} = r(e_{n+1})$.

Xét $x = v_{n+1}$. Ta có $[x] = [v_{n+1}] \neq 0$ và

$$\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] + [x] = \left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right].$$

Thật vậy, áp dụng quan hệ (M) trên M_E cho v_1 ở vế phải ta được

$$\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] = \left[v_2 + v_{n+1} + v_2 + v_3 + ... + v_h\right].$$

Tiếp tục áp dụng quan hệ (M) trên M_E cho v_2 thì $v_2 \mapsto v_3$. Khi đó,

$$\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] = \left[v_3 + v_{n+1} + v_2 + v_3 + ... + v_h\right].$$

Tiếp tục quá trình trên, ta được

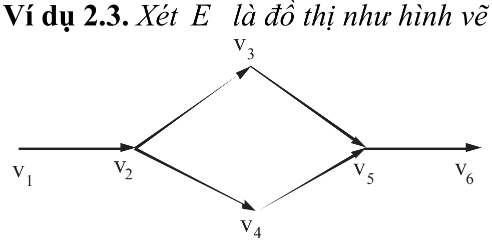
$$v_2 \mapsto v_3 \mapsto ....v_n \mapsto v_1.$$

Khi đó,

$$\left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] = \left[v_1 + v_2 + ... + v_h + v_{n+1}\right] = \left[\sum_{i=1}^{h} v_i\right] + [x].$$

Theo Bổ đề 2.1, $L_K(E)$ không phải là vành Hermite. □

Ví dụ 2.3. *Xét E là đồ thị như hình vẽ sau*



Hình 1. Đồ thị không có chu trình

Khi đó $L_K(E)$ là vành Hermite.

Chứng minh. Giả sử với $n_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,6}$, ta có

$$x = n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 + n_4 v_4 + n_5 v_5 + n_6 v_6$$

thỏa mãn

$$m[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6] + [x] = n[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6]. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra có các số không âm k_i, k'_i $(i = 1,2,3,4,5)$ để khi ta áp dụng quan hệ (M) trong $M_{C(E)}$ k_i lần cho v_i đối với vế trái, k'_i lần cho v_i $(i = 1,2,3,4,5)$ đối với vế phải, từ (1) ta được hệ

$$\begin{cases} m-n+n_1 = & -m_1 & & & & \\ m-n+n_2 = & m_1 & -m_2 & & & \\ m-n+n_3 = & & +m_2 & -m_3 & & \\ m-n+n_4 = & & +m_2 & & -m_4 & \\ m-n+n_5 = & & & +m_3 & +m_4 & -m_5 \\ m-n+n_6 = & & & & & +m_5 \\ \quad m_i = & k'_i - k_i & (i=\overline{1,5}) & & & \end{cases} \quad (2).$$

Từ (2) ta nhân hai phương trình đầu với 2 rồi cộng tất cả các phương trình lại theo từng vế, ta được

$$8(n-m) = 2n_1 + 2n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 \quad (3)$$

suy ra $m \le n$. Như vậy, theo Bổ đề 2.1, ta chỉ còn phải chứng tỏ rằng

$$[x] = (n-m)[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6] \quad (4)$$

Áp dụng quan hệ (M) trong $M_{C(E)}$ như sau

Bảng 1. Số lần áp dụng quan hệ (M) lên các đỉnh ở hai vế của (4)

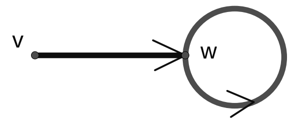
Vế trái		Vế phải	
Đỉnh	**Số lần**	**Đỉnh**	**Số lần**
v_1	$l_1 = n_1$	v_1	$l'_1 = n-m$
v_2	$l_2 = l_1 + n_2$	v_2	$l'_2 = l'_1 + n - m$
v_3	$l_3 = l_2 + n_3$	v_3	$l'_3 = l'_2 + n - m$
v_4	$l_4 = l_2 + n_4$	v_4	$l'_4 = l'_2 + n - m$
v_5	$l_5 = l_3 + l_4 + n_5$	v_5	$l'_5 = l'_3 + l'_4 + n - m$

Khi đó (4) trở thành

$$\left[(2n_1 + 2n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6)v_6\right] = [8(n-m)v_6]. \quad (5)$$

Ta thấy (5) được suy ra từ (3). □

Ví dụ 2.4. *Xét E là đồ thị như hình vẽ sau*



Hình 2. Đồ thị không có lối ra

Khi đó $L_K(E)$ là vành Hermite.

Chứng minh. Giả sử $x = n_1 v + n_2 w, n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$ thỏa mãn

$$m[v+w] + [x] = n[v+w]. \quad (6)$$

Từ (6) suy ra có các số không âm k_i, k'_i $(i = 1,2)$ để khi ta áp dụng quan hệ (M) trong $M_{C(E)}$ k_1 (tương ứng k_2) lần cho v (tương ứng w) đối với vế trái, k'_1 (tương ứng k'_2) lần cho v (tương ứng w) đối với vế phải, từ (6) ta được hệ

$$\begin{cases} m-n+n_1 = -k'_i + k_i \\ m-n+n_2 = k'_1 - k_1 \end{cases}. \quad (7)$$

Cộng theo vế hệ (7), ta được

$$2(n-m) = n_1 + n_2 \quad (8)$$

suy ra $m \le n$. Như vậy, ta chỉ còn phải chứng tỏ rằng

$$[x] = (n-m)[v+w]. \quad (9)$$

Áp dụng quan hệ (M) trong $M_{C(E)}$ cho đỉnh v_1 ở vế phải $n-m$ lần và ở vế trái n_1 lần, khi đó (9) trở thành

$$\left[(n_1 + n_2)w\right] = [2(n-m)w]. \quad (10)$$

Ta thấy (10) được suy ra từ (8). □

Tài liệu tham khảo

[1]. G. Abrams and G. Aranda Pino (2005), "The Leavitt path algebra of a graph", *Journal of Algebra*, (293), p. 319-334.

[2]. G. Abrams, P. Ara and M. S. Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Mathematics series, Springer-Verlag Inc. (to appear).

[3]. G. Abrams, G. Aranda Pino and M. Siles Molina (2008), "Locally finite Leavitt path algebras", *Israel J. Math*, (165), p. 329-348.

[4]. G. Abrams and M. Kanuni (2013), "Cohn path algebras have invariant basic number", *arXiv id*:1303.2122v2.

[5]. P. Ara, A. Moreno and E. Pardo (2007), "Nonstable K-theory for graph algebras", *Algebra Represent Theory*, 2 (10), p. 157-178.

[6]. P. M. Cohn (2000), "From Hermite rings to Sylvester domains", *Proc. Amer. Math. Soc*, 7 (128), p. 1899-1904.

[7]. P. M. Cohn (2006), *Free ideal rings and localization in general rings,* New Mathematical Monographs, 3. Cambridge University Press, Cambridge.

[8]. T. Y. Lam (2006), *Serre's problem on projective modules,* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

THE LEAVITT PATH ALGEBRAS HAVE HERMITE PROPERTY

Summary

In this paper, we establish a necessary condition for Leavitt path algebra of a finite graph with coefficients of Hermite ring in a field. Besides, we also provide some examples of this algebra type.

Keywords: Leavitt path algebra, Hermite ring.

Ngày nhận bài: 05/10/2015; Ngày nhận lại: 02/12/2015; Ngày duyệt đăng: 05/02/2016.