MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HAY GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

• ThS. Nguyễn Thị Hoài Quyên(*)

Tóm tắt

Trong bài báo này, một số phương pháp hay dùng để giải phương trình hàm được trình bày cụ thể nội dung, kèm theo ví dụ điển hình minh họa cho từng phương pháp. Qua đó giúp người học dễ hình dung và nắm bắt được phương pháp giải từng loại phương trình hàm.

Từ khóa: phương trình, hàm số, phương pháp giải, phương trình hàm, câu hỏi, bài tập.

1. Mở đầu

Phương trình hàm là một trong những chuyên đề rất quan trọng trong việc bồi dưỡng sinh viên thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc. Phương trình hàm hiện có rất nhiều phương pháp giải khác nhau. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp giải phương trình hàm và ví dụ minh hoạ.

2. Một số phương pháp giải phương trình hàm

2.1. Phương pháp dồn biến

Bằng cách biến đổi thích hợp, ta dồn mỗi biến về một vế của phương trình, sau đó, sử dụng các tính chất đặc trưng của hàm để giải quyết bài toán.

Bài 1 [1, tr. 36]. Tìm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2),$$
$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Giải

Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow vf(u)-uf(v)=(u^2-v^2)uv$$

$$\Rightarrow \frac{f(u)}{u}-u^2=\frac{f(v)}{v}-v^2,\ \forall u,v\neq 0.$$

Cho $v=1$ ta có:

$$\frac{f(u)}{u}-u^2=\frac{f(1)}{1}-1^2,\ \forall u\neq 0$$

$$\Rightarrow f(u)=u^3+au,\ \forall u\neq 0\quad (a=f(1)-1).$$

Cho $x=y$ ta có $-2xf(0)=0$ do đó $f(0)=0$.

Kết luận: $f(x)=x^3+ax,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

2.2. Phương pháp đánh giá

Giả sử ta cần tìm hàm $f(x)$ với miền xác định D_f. Từ giả thiết bài toán và bằng lập luận ta đánh giá được:

1. $f(x)\ge g(x),\ \forall x\in D_f$
2. $f(x)\le g(x),\ \forall x\in D_f$

trong đó $g(x)$ là một hàm số đã biết trước. Từ 1 và 2 ta suy ra: $f(x)=g(x)\ \forall x\in D_f$.

Bài 2 [6, tr. 5]. Tìm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:

$$\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x).f(yz)\ge\frac{1}{4},$$
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

Giải

Cho $x=y=z=0$ ta được:

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)-f^2(0)\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (f(0)-\frac{1}{2})^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{2}.$$

Cho $y=z=0$ và x tuỳ ý ta được:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}f(x)\ge\frac{1}{4},\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)\le\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Cho $x=y=z=1$ ta được:

$$\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(1)-f^2(1)\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f^2(1)-f(1)+\frac{1}{4}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (f(1)-\frac{1}{2})^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}.$$

(*) Khoa Giáo dục tiểu học, Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An.

Cho $y = z = 1$ và x tuỳ ý:

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - f(x)\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $f(x) = \frac{1}{2}$.

2.3. Phương pháp sử dụng tính chất nghiệm một đa thức

Bài 3 [7, tr. 20]. Tìm đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thoả mãn đẳng thức:

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x) \quad \forall x \ (1)$$

Giải

(1) $\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x), \forall x.$

Chọn:

$x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0;$

$x = -1 \Rightarrow P(-1) = 0;$

$x = 0 \ \Rightarrow P(0) = 0;$

$x = 1 \ \Rightarrow P(1) = 0;$

Vậy $P(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)G(x)$.

Thay $P(x)$ vào (1) ta được:

$$(x+2)(x^2+x+1)(x-1)(x-2)x(x+1)G(x-1)$$

$$= (x-2)(x^2-x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)G(x), \forall x$$

$$\Rightarrow (x^2+x+1)G(x-1) = (x^2-x+1)G(x), \forall x$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(x-1)}{x^2-x+1} = \frac{G(x)}{x^2+x+1}, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} = \frac{G(x)}{x^2+x+1}, \forall x.$$

Đặt $R(x) = \dfrac{G(x)}{x^2+x+1} \quad (x \neq 0, \pm 1, -2)$

$\Rightarrow R(x) = R(x-1) \quad (x \neq 0, \pm 1, -2)$

$\Rightarrow R(x) = C.$

Vậy $P(x) = C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2).$

2.4. Phương pháp chuyển bài toán về xác định dãy số

Phương pháp này thường dùng cho các phương trình hàm có dạng:

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n + dx_{n-1} = f_n, \quad n \geq 2$$

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$$

Trong đó $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số, $a \neq 0$ và f_n là biểu thức của n cho trước.

Bài 4 [4, tr. 55-56]. Tìm $\{x_n\}$ biết:

$$x_n = 7x_{n-1} - 11x_{n-2} + 5x_{n-3}, n \geq 4$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$$

Giải

Phương trình đặc trưng là:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$$

Suy ra $x_n = c_1 + c_2 n + c_3 5^n$.

Để tìm c_1, c_2, c_3 ta phải dựa vào x_1, x_2, x_3 và cho $n = 1, n = 2, n = 3$ khi đó ta sẽ tìm được:

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{13}{16} \\ c_2 = \dfrac{3}{4} \\ c_3 = \dfrac{1}{80} \end{cases}$$

Từ đó ta có $x_n = -\dfrac{13}{16} + \dfrac{3}{4}n + \dfrac{1}{80}5^n.$

2.5. Phương pháp điểm bất động

Điểm x_f được gọi là điểm bất động của hàm $f(x)$ nếu $f(x_f) = x_f$. Dựa vào tính chất của điểm bất động ta áp dụng để giải các bài phương trình hàm dạng:

$$f(x+a) = f(x) + b, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a, b \text{ tùy ý}$$

Sử dụng tính chất điểm bất động, ta xét giá trị hàm là c khi đó giải phương trình:

$c = c + b \quad \Rightarrow c = \infty$. Khi đó ta coi b như là $f(a)$. Chuyển hàm đã cho về dạng:

$f(x+a) = f(x) + f(a)$ (*). Dựa vào đặc trưng hàm, ta có $f(x)$ là hàm tuyến tính $f(x) = ax$, thay vào phương trình (*), tìm được a. Từ đây ta đặt: $f(x) = ax + g(x)$ thay vào (*), ta tìm được $g(x)$.

Bằng cách tương tự ta có thể giải các phương trình hàm dạng:

1. $f(x+a) = -f(x) + b, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a, b$ tùy ý;
2. $f(x+a) = bf(x) + e, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a, b, e$ tùy ý;
3. $f(\alpha x + \beta) = f(\alpha x) + b, \ \alpha \neq \{-1, 0, 1\}, \forall x \in \mathbb{R},$ α, β, a, b tùy ý;

với cách đặt $f(x) = c + g(x)$.

Bài 5 [2, tr. 87-88]. Xác định các hàm số f(x) sao cho: $f(x+1) = f(x) + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Giải

Ta cần tìm c sao cho $c = c + 2$. Do đó $c = \infty$.

Vì vậy ta coi 2 như là $f(1)$ ta được: $f(x+1) = f(x) + f(1)$ (*).

Như vậy ta đã chuyển ra phép cộng. Dựa vào đặc trưng hàm, ta phải tìm a sao cho $f(x) = ax$ để khử số 2. Ta được:

(*) $\Leftrightarrow a(x+1) = ax + 2 \Leftrightarrow a = 2.$

Vậy ta làm như sau:

Đặt $f(x) = 2x + g(x).$

Thay vào (*) ta được:

$$2(x+1) + g(x+1) = 2x + g(x) + 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x+1) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1.

Vậy $f(x) = 2x + g(x)$ với $g(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1.

3. Kết luận

Trên đây là một số phương pháp hay để giải phương trình hàm một cách ngắn gọn, súc tích và dễ hiểu. Chúng ta có thể áp dụng nó để giải quyết các bài toán về phương trình hàm, một chuyên đề khó mà người học cần quan tâm.

Tương tự, sử dụng các phương pháp như trên ta có thể giải quyết các bài toán sau:

Bài 1 [7, tr. 2]. Đa thức $f(x)$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện:

$2f(x) + f(1-x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$ Tìm $f(x)$.

Bài 2 [6, tr. 4]. Hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

$a)\, f(f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ (1)

$b)\, f(f(n+2)+2) = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ (2)

$c)\, f(0) = 1$ (3)

Tìm giá trị $f(1995), f(-2007).$

Bài 3 [7, tr. 4]. Hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thoả mãn điều kiện sau:

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Tìm giá trị $f(2005)$.

Bài 4 [7, tr. 31]. Cho $S = (-1, +\infty)$. Tìm tất cả các hàm $f : S \to S$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện:

a) $f\left[x + f(y) + xf(y)\right] = y + f(x) + yf(x), \forall x, y \in S$

b) $\dfrac{f(x)}{x}$ là hàm tăng với $-1 < x < 0$ và $0 < x < +\infty$.

Bài 5 [6, tr 5]. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho

$$f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Văn Nho, Vũ Văn Thoả (2004), *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán (tập 3)*, NXB Giáo dục.

[2]. Nguyễn Văn Mậu (2004), *Phương trình hàm*, NXB Giáo dục.

[3]. Nguyễn Văn Mậu (2004), *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo dục.

[4]. Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn (2006), *Các đề thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc*, NXB Giáo dục.

[5]. Vũ Dương Thuỵ, Nguyễn Văn Nho (2004), *Olympic Toán học châu Á Thái Bình Dương,* NXB Giáo dục.

[6]. www.diendantoanhoc.net.

[7]. http://ebook.here.vn.

USEFUL METHODS FOR SOLVING FUNCTIONAL EQUATIONS

Summary

This paper details some useful methods used to solve functional equations, one by one with illustrative examples, respectively. Thereby, it helps learners easily visualize and master the methods of solving each equation function.

Keywords: Equation, function, solution method, functional equation, question, exercise.

Ngày nhận bài: 09/7/2015; Ngày nhận lại: 07/9/2015; Ngày duyệt đăng: 21/10/2015.