



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.ns.3120.1889>

ĐẶC TRƯNG HÓA KIỂU BESSAGA VỀ TÍNH ĐẦY ĐỦ CỦA KHÔNG GIAN (q_1, q_2) -METRIC

Nguyễn Sỹ Thắng, Ông Hoàng Anh Kiệt và Nguyễn Hoàng Thành*

Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Việt Nam

*Tác giả liên hệ, Email: nhthanh@ued.udn.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 15/01/2026; Ngày nhận chỉnh sửa: 23/3/2026; Ngày duyệt đăng: 20/4/2026

Tóm tắt

Bài báo này chứng minh định lý Bessaga, được xem như dạng đảo của nguyên lý ánh xạ co Banach, trong một lớp không gian metric suy rộng mới là không gian (q_1, q_2) -metric. Mục đích chính của bài báo này là thiết lập các điều kiện để đảm bảo sự tồn tại của một (q_1, q_2) -metric đầy đủ trên một tập X và một ánh xạ $T: X \rightarrow X$ cho trước. Cụ thể, bài báo chứng minh kết quả sau: Cho X là một tập khác rỗng bất kì, ánh xạ $T: X \rightarrow X$, hai số thực q_1, q_2 thỏa mãn $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$ và số thực dương α thỏa $\alpha q_1, \alpha q_2 \in (0, 1)$. Khi đó, nếu T^n có duy nhất một điểm bất động với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì tồn tại một (q_1, q_2) -metric đầy đủ d sao cho $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Kết quả này cho thấy định lý Bessaga vẫn đúng trong các không gian metric suy rộng như không gian (q_1, q_2) -metric.

Từ khóa: Định lý Bessaga, Không gian (q_1, q_2) -metric, Nguyên lý ánh xạ co Banach.

Trích dẫn: Nguyễn, S. T., Ông, H. A. K., & Nguyễn, H. T. (2026). Đặc trưng hóa kiểu Bessaga về tính đầy đủ của không gian (q_1, q_2) -metric. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp - Chuyên san Khoa học Tự nhiên, Online First*, 1-11. <https://doi.org/10.52714/dthu.ns.3120.1889>

Copyright © 2026 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

BESSAGA-TYPE CHARACTERIZATION OF COMPLETENESS IN (q_1, q_2) -METRIC SPACES

Nguyen Sy Thang, Ong Hoang Anh Kiet, and Nguyen Hoang Thanh*

Department of Mathematics, University of Education, The University of Danang, Vietnam

**Corresponding author, Email: nhthanh@ued.udn.vn*

Article history

Received: 15/01/2026; Received in revised form: 23/3/2026; Accepted: 20/4/2026

Abstract

This paper proves Bessaga's theorem known as a converse of the Banach contraction principle, in a new class of generalized metric spaces known as (q_1, q_2) -metric spaces. This paper is to establish conditions for the existence of a complete (q_1, q_2) -metric on a set X associated with a given mapping $T: X \rightarrow X$. Specifically, the paper establishes the following result: Let X be a nonempty set, $T: X \rightarrow X$ be a mapping, two real numbers q_1, q_2 satisfy $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$ and a positive real number α such that $\alpha q_1, \alpha q_2 \in (0, 1)$. Under this assumption, if for every natural number n , each iterate T^n admits a unique fixed point, then there exists a complete (q_1, q_2) -metric d on X satisfying $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ for all $x, y \in X$. This result demonstrates that Bessaga's theorem remains valid in generalized metric spaces such as (q_1, q_2) -metric spaces.

Keywords: *Banach contraction principle, Bessaga's theorem, (q_1, q_2) -metric spaces.*

1. Giới thiệu

Định lý điểm bất động Banach hay nguyên lý ánh xạ co Banach (Banach, 1922), được Stefan Banach công bố vào năm 1922, được xem là một trong những kết quả nền tảng và có ảnh hưởng sâu sắc nhất trong lĩnh vực giải tích phi tuyến và lý thuyết điểm bất động. Định lý này phát biểu rằng: Cho (X, d) là một không gian metric đầy đủ, α là số thực dương sao cho $\alpha \in (0, 1)$ và ánh xạ $T: X \rightarrow X$ thỏa mãn $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó T có duy nhất điểm bất động. Định lý điểm bất động Banach có vô số ứng dụng trong việc giải quyết sự tồn tại và duy nhất của nghiệm cho các phương trình vi phân, phương trình tích phân, và các hệ thống động lực. Đến giữa thế kỷ XX, Bessaga (1959) đã đưa ra một định lý đảo của nguyên lý ánh xạ co Banach: Cho $X \neq \emptyset$ là một tập bất kỳ, ánh xạ $T: X \rightarrow X$ và số thực dương α thỏa mãn $\alpha \in (0, 1)$. Khi đó, nếu T^n có duy nhất một điểm bất động với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì tồn tại một metric đầy đủ d sao cho $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.

Định lý Bessaga không chỉ làm nổi bật tầm quan trọng của tính đầy đủ mà còn mở ra hướng nghiên cứu về việc đặc trưng hóa tính đầy đủ thông qua sự tồn tại của điểm bất động. Trong nỗ lực giải quyết các vấn đề trong vật lý lý thuyết và khoa học máy tính mà ở đó bất đẳng thức tam giác tiêu chuẩn $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ tỏ ra quá khắt khe, một loạt các không gian metric suy rộng đã được giới thiệu. Một trong những hướng mở rộng quan trọng nhất là không gian b-metric (hoặc không gian metric loại Czerwik), được Czerwik giới thiệu vào năm 1993 (Czerwik, 1993). Trong không gian b-metric (X, d, s) , bất đẳng thức tam giác được “nới lỏng” thành $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$ với hằng số $s \geq 1$. Ngoài ra, các không gian metric suy rộng khác như không gian metric riêng (Matthews, 1994), không gian G-metric (Mustafa & Sims, 2006), không gian S-metric (Sedghi & cs., 2012) hay không gian Controlled metric (Mlaiki & cs., 2018),... cũng đã thu hút sự chú ý đáng kể. Một cách tự nhiên, câu hỏi về việc liệu định lý Bessaga có còn đúng trong các không gian suy rộng này hay không đã được đặt ra. Câu hỏi này vẫn còn là một vấn đề mở trên không gian (q_1, q_2) -metric, chính vì vậy, chúng tôi quyết định chọn đề tài này.

2. Một số khái niệm cơ bản

Mục này trình bày một số khái niệm cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 2.1. (Czerwik, 1993) Cho X là một tập hợp khác rỗng và số thực $s \geq 1$. Ánh xạ $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được gọi là b-metric nếu với mọi $x, y, z \in X$

- (bi) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (bii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (biii) $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Khi đó (X, d, s) được gọi là không gian b-metric với tham số s . Bất đẳng thức (biii) còn được gọi là bất đẳng thức s -tam giác.

Định nghĩa 2.2. Cho X là một tập hợp khác rỗng và hai số thực q_1, q_2 sao cho $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$. Ánh xạ $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được gọi là (q_1, q_2) -metric nếu với mọi $x, y, z \in X$

- (qi) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (qii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (qiii) $d(x, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z)$.

Khi đó bộ (X, d, q_1, q_2) được gọi là không gian (q_1, q_2) -metric với hai tham số q_1, q_2 . Bất đẳng thức (qiii) còn được gọi là bất đẳng thức (q_1, q_2) -tam giác.

Nhận xét 2.3. Cho (X, d, q_1, q_2) là không gian (q_1, q_2) -metric. Khi đó điều kiện (qiii) tương đương với điều kiện sau, với mọi $x, y, z \in X$

$$(qiii') \quad d(x, z) \leq q_1 d(y, z) + q_2 d(x, y).$$

Thật vậy, $d(x, z) = d(z, x) \leq q_1 d(z, y) + q_2 d(y, x) = q_1 d(y, z) + q_2 d(x, y)$.

Nhận xét 2.4. Cho (X, d, q_1, q_2) là không gian (q_1, q_2) -metric. Nếu $q_1 = q_2 = q$ thì (X, d, q_1, q_2) là không gian b-metric (X, d, s) với $s = q$. Hơn nữa, nếu ta đặt $q^* = \max\{q_1, q_2\}$ thì mỗi không gian (q_1, q_2) -metric đều là không gian b-metric với $s = q^*$.

Các khái niệm cơ bản khác được định nghĩa tương tự như không gian metric cổ điển.

Định nghĩa 2.5. Cho (X, d, q_1, q_2) là không gian (q_1, q_2) -metric, $\{x_n\}$ là một dãy số trong X và $x \in X$. Khi đó ta có các định nghĩa sau:

1. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ về x nếu dãy $\{d(x_n, x)\}$ hội tụ về 0. Khi đó ta viết $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ và với mọi $p \in \mathbb{N}$ thì $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.
3. Không gian (X, d, q_1, q_2) là không gian (q_1, q_2) -metric đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ. Khi đó ánh xạ d được gọi là (q_1, q_2) -metric đầy đủ.

Nhận xét 2.6. Cho (X, d, q_1, q_2) là không gian (q_1, q_2) -metric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X .

- a) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$ thì giới hạn đó là duy nhất.
- b) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì nó là dãy Cauchy.
- c) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x thì dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ cũng hội tụ về x .
- d) Cho $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, khi đó nếu dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x thì dãy $\{x_n\}$ cũng hội tụ về x , với $x \in X$.

Chứng minh.

- a) Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$ và $y \in X$, khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $\frac{\varepsilon}{q_1+q_2} > 0$, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$ thì $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Mà $\{x_n\}$ hội tụ về $y \in X$ nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_2$ thì $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì $0 \leq d(x, y) \leq q_1 d(x, x_n) + q_2 d(x_n, y) < \frac{(q_1+q_2)\varepsilon}{q_1+q_2} = \varepsilon$, do đó $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- b) Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$, khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $\frac{\varepsilon}{q_1+q_2} > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Hơn nữa, với mọi $p \in \mathbb{N}$ thì $n + p \geq n$ nên với $n \geq n_0$ thì $n + p \geq n_0$, khi đó $d(x_{n+p}, x) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Từ đây suy ra với mọi $n \geq n_0$ thì $d(x_{n+p}, x_n) \leq q_1 d(x_{n+p}, x) + q_2 d(x, x_n) < \frac{(q_1+q_2)\varepsilon}{q_1+q_2} = \varepsilon$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.
- c) Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$ và $\{x_{k_n}\}$ là dãy con bất kì của dãy $\{x_n\}$. Vì $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in X$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $\frac{\varepsilon}{q_1+q_2} > 0$, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$ thì $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Hơn nữa, theo ý b) thì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_2$ thì $d(x_n, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0 =$

$\max\{n_1, n_2\}$ thì $d(x_{k_n}, x) \leq q_1 d(x_{k_n}, x_n) + q_2 d(x_n, x) < \frac{(q_1+q_2)\varepsilon}{q_1+q_2} = \varepsilon$. Như vậy, dãy $\{x_{k_n}\}$ hội tụ về $x \in X$.

- d) Thật vậy, giả sử $\{x_{k_n}\}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{k_n}\}$ hội tụ về $x \in X$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $\frac{\varepsilon}{q_1+q_2} > 0$, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$ thì $d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Mặt khác, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_2$ thì $d(x_n, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{q_1+q_2}$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì $d(x_n, x) \leq q_1 d(x_n, x_{k_n}) + q_2 d(x_{k_n}, x) < \frac{(q_1+q_2)\varepsilon}{q_1+q_2} = \varepsilon$. Như vậy, dãy $\{x_n\}$ hội tụ về $x \in X$.

Định nghĩa 2.7. Cho (X, d, q_1, q_2) , (X', d', q_1', q_2') là hai không gian (q_1, q_2) -metric. Ánh xạ $f: X \rightarrow X'$ được gọi là liên tục theo (q_1, q_2) -metric tại $x \in X$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ về x thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$. Ánh xạ f được gọi là liên tục trên $A \subset X$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in A$.

Sau đây chúng tôi sẽ trình bày một vài ví dụ về không gian (q_1, q_2) -metric cũng như chỉ ra rằng nếu d là một (q_1, q_2) -metric thì d không nhất thiết phải là ánh xạ liên tục.

Ví dụ 2.8. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ và ánh xạ $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định như sau

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ với mọi } x, y \in X,$$

$$d(0, 1) = d(1, 0) = 1,$$

$$d(0, 2) = d(2, 0) = 2,$$

$$d(1, 2) = d(2, 1) = \frac{2}{3}.$$

Khi đó, d là một $(1, \frac{3}{2})$ -metric. Thật vậy, dễ dàng kiểm tra được d thỏa mãn (qi), (qii). Ta chỉ cần kiểm tra (qiii), ta có

$$d(0, 1) = 1 \leq 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = d(0, 2) + \frac{3}{2} d(2, 1),$$

$$d(0, 1) = 1 \leq \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot 2 = d(2, 1) + \frac{3}{2} d(0, 2),$$

$$d(0, 2) = 2 \leq 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = d(0, 1) + \frac{3}{2} d(1, 2),$$

$$d(0, 2) = 2 \leq \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot 1 = d(1, 2) + \frac{3}{2} d(0, 1),$$

$$d(1, 2) = \frac{2}{3} \leq 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 = d(1, 0) + \frac{3}{2} d(0, 2),$$

$$d(1, 2) = \frac{2}{3} \leq 2 + \frac{3}{2} \cdot 1 = d(0, 2) + \frac{3}{2} d(1, 0).$$

Do đó, với các lập luận trên suy ra d là một $(1, \frac{3}{2})$ -metric.

Ví dụ 2.9. (Doan, 2021) Cho $X = A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ với $n \in \mathbb{N}$ cố định và ánh xạ $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi $d(x, y) = (x - y)^2$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó, d là một $(1, 2n - 1)$ -metric. Thật vậy, dễ dàng kiểm tra được d thỏa mãn (qi), (qii). Ta chỉ cần kiểm tra

(qiii), với mọi $x, y, z \in X$, đặt $a = x - z \in \{-n, -n + 1, \dots, 0, 1, \dots, n - 1, n\}$ suy ra $x = a + z$, khi đó ta xét

$$\begin{aligned} d(x, y) + (2n - 1)d(y, z) - d(x, z) &= (a + z - y)^2 + (2n - 1)(y - z)^2 - a^2 \\ &= a^2 + 2a(z - y) + (2n - 1 + 1)(z - y)^2 - a^2 \\ &= 2a(z - y) + 2n(z - y)^2 = 2(z - y)[a + n(z - y)] \end{aligned} \quad (\#)$$

Ta xét 3 trường hợp.

Trường hợp 1: $z = y$.

Khi đó từ (#) suy ra $d(x, y) + (2n - 1)d(y, z) - d(x, z) = 0$ suy ra

$$d(x, z) \leq d(x, y) + (2n - 1)d(y, z).$$

Trường hợp 2: $z > y$ suy ra $z - y > 0$ hay $z - y \geq 1$.

Khi đó ta có $a + n(z - y) \geq a + n \geq 0$ nên từ (#) suy ra

$$d(x, y) + (2n - 1)d(y, z) - d(x, z) \geq 0 \Leftrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + (2n - 1)d(y, z).$$

Trường hợp 3: $z < y$ suy ra $z - y < 0$ hay $z - y \leq -1$.

Khi đó ta có $a + n(z - y) \leq a - n \leq 0$ nên từ (#) suy ra

$$d(x, y) + (2n - 1)d(y, z) - d(x, z) \geq 0 \Leftrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + (2n - 1)d(y, z).$$

Như vậy, $d(x, z) \leq d(x, y) + (2n - 1)d(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Ví dụ 2.10. (Sengupta & Zhukovskiy, 2019) Cho $X = \mathbb{R}$, số thực $q > 1$, $a(x, y)$ là một metric trên X và ánh xạ $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định như sau

$$d(x, y) = \begin{cases} a(x, y), & x - y \in \mathbb{Q} \\ qa(x, y), & x - y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Khi đó, d là một (q, q) -metric hay nói cách khác d là một b-metric với $s = q$ và d không liên tục. Thật vậy, từ định nghĩa ta có thể dễ dàng kiểm tra được d thỏa mãn (qi), (qii) và với mọi $x, y \in X$ thì $a(x, y) \leq d(x, y)$. Ta kiểm tra (qiii),

Với mọi $x, y, z \in X$,

Nếu $x - z \in \mathbb{Q}$ thì $d(x, z) = a(x, z) \leq a(x, y) + a(y, z) < q[d(x, y) + d(y, z)]$.

Nếu $x - z \notin \mathbb{Q}$ thì $d(x, z) = qa(x, z) \leq q[a(x, y) + a(y, z)] \leq q[d(x, y) + d(y, z)]$.

Do đó, d là một (q, q) -metric. Ta kiểm tra tính liên tục của d , cho dãy $\{x_n\} \subset X$ xác định bởi $x_n = \frac{\pi}{n}$, với $n \in \mathbb{N}$. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nhưng $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 1) = qa(0, 1) > a(0, 1) = d(1, 0)$ nên d không liên tục.

Ví dụ 2.11. (Lu & cs., 2019) Cho $X = [0, +\infty)$, số thực $q > 1$, $p(x, y)$ là một metric thông thường trên X và ánh xạ $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được xác định như sau

$$d(x, y) = \begin{cases} a(x, y), & xy \neq 0 \\ qa(x, y), & xy = 0. \end{cases}$$

Khi đó d là một (q, q) -metric và d không liên tục. Thật vậy, rõ ràng d thỏa mãn (qi), (qii) và $a(x, y) \leq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Ta kiểm tra (qiii), lấy $x, y, z \in X$ bất kì, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $xz \neq 0$ suy ra $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

1a. Nếu $y = 0$ thì

$$d(x, z) = a(x, z) \leq a(x, y) + a(y, z) = \frac{1}{q}[d(x, y) + d(y, z)] < q[d(x, y) + d(y, z)].$$

1b. Nếu $y \neq 0$ thì

$$d(x, z) = a(x, z) \leq a(x, y) + a(y, z) = d(x, y) + d(y, z) < q[d(x, y) + d(y, z)].$$

Trường hợp 2: $xz = 0$, không giảm tổng quát ta giả sử $x = 0$.

2a. Nếu $y = 0$ thì $x = y$ nên

$$d(x, z) \leq 0 + qd(y, z) = q[d(x, y) + d(y, z)].$$

2b. Nếu $y \neq 0$ thì

$$d(x, z) = qa(x, z) \leq q[a(x, y) + a(y, z)] \leq d(x, y) + qd(y, z) < q[d(x, y) + d(y, z)].$$

Do đó d là một (q, q) -metric. Hơn nữa, cho $\{x_n\}$ xác định bởi $x_n = \frac{1}{n}$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nhưng $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 1) = a(0, 1) < qa(0, 1) = d(0, 1)$ nên d không liên tục.

Từ những ví dụ trên ta có thể thấy được rằng một (q_1, q_2) -metric d không nhất thiết phải là ánh xạ liên tục như metric cổ điển. Tuy nhiên, điều này không ảnh hưởng đến kết quả của định lý Bessaga được trình bày ở mục sau.

3. Kết quả chính

Định lý 3.1. (Nguyên lý ánh xạ co Banach cho (q_1, q_2) -metric) Cho không gian (q_1, q_2) -metric đầy đủ (X, d, q_1, q_2) , số thực $\alpha \in [0, 1)$ sao cho $\alpha q_1, \alpha q_2 \in [0, 1)$ và ánh xạ $T: X \rightarrow X$ thỏa mãn $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó T có duy nhất điểm bất động z và dãy $\{T^n(x)\}$ hội tụ về z theo (q_1, q_2) -metric d với mọi $x \in X$.

Chứng minh

T là ánh xạ liên tục. Thật vậy, với mọi $x \in X$, cho dãy $\{x_n\}$ bất kỳ hội tụ về x . Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $\frac{\varepsilon}{\alpha+1} > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{\alpha+1}$. Ta có $d(Tx_n, Tx) \leq \alpha d(x_n, x) < \frac{\alpha}{\alpha+1} \varepsilon < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$, suy ra dãy $\{Tx_n\}$ hội tụ về Tx . Theo Định nghĩa 2.7 suy ra T liên tục trên X .

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leq \alpha d(T^{n-1} x, T^n x) \leq \dots \leq \alpha^n d(x, Tx), \forall x \in X.$$

Đặt $s = \max\{q_1, q_2\} \geq 1$, ta xét bất đẳng thức

$$d(Tx, T^{p+1} x) \leq [\alpha s + (\alpha s)^2 + \dots + (\alpha s)^p] d(x, Tx) \quad (*)$$

Ta có $(*)$ đúng với $p = 1$ vì $d(Tx, T^2 x) \leq \alpha d(x, Tx)$.

Giả sử $(*)$ đúng với $p = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$\begin{aligned} d(Tx, T^{k+2} x) &\leq \alpha d(x, T^{k+1} x) \leq \alpha s [d(x, Tx) + d(Tx, T^{k+1} x)] \\ &\leq \alpha s d(x, Tx) + \alpha s [\alpha s + (\alpha s)^2 + \dots + (\alpha s)^k] d(x, Tx) \\ &= [\alpha s + (\alpha s)^2 + \dots + (\alpha s)^{k+1}] d(x, Tx). \end{aligned}$$

Suy ra $(*)$ đúng với $p = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp $(*)$ đúng với mọi $p \in \mathbb{N}$.

Lại xét bất đẳng thức

$$d(T^n x, T^{n+p} x) \leq (s\alpha^n + s^2\alpha^{n+1} + \dots + s^p\alpha^{n+p-1})d(x, Tx) \quad (\#)$$

với mọi $x \in X$ và với mọi $p \in \mathbb{N}$.

Từ (*) suy ra (#) đúng với $n = 1$. Giả sử (#) đúng với $n = l \geq 1, l \in \mathbb{N}$, khi đó

$$\begin{aligned} d(T^{l+1}x, T^{l+p+1}x) &\leq \alpha d(T^l x, T^{l+p} x) \\ &\leq \alpha(s\alpha^l + s^2\alpha^{l+1} + \dots + s^p\alpha^{l+p-1})d(x, Tx) \\ &= (s\alpha^{l+1} + s^2\alpha^{l+2} + \dots + s^p\alpha^{l+p})d(x, Tx). \end{aligned}$$

Suy ra (#) đúng với $n = l + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (#) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(T^n x, T^{n+p} x) \\ &\leq (s\alpha^n + s^2\alpha^{n+1} + \dots + s^p\alpha^{n+p-1})d(x, Tx) \\ &= \alpha^{n-1}(\alpha s + (\alpha s)^2 + \dots + (\alpha s)^p)d(x, Tx) \\ &\leq \alpha^{n-1}(\alpha s + (\alpha s)^2 + \dots + (\alpha s)^p + \dots)d(x, Tx) \\ &= \alpha^{n-1} \frac{\alpha s}{1 - \alpha s} d(x, Tx) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\{T^n x\}$ là dãy Cauchy trong không gian (q_1, q_2) -metric đầy đủ. Do đó tồn tại $z \in X$ sao cho $\{T^n x\}$ hội tụ về z . Từ tính liên tục của T suy ra $Tz = z$.

Ta kiểm tra tính duy nhất của z . Giả sử tồn tại z^* thỏa $Tz^* = z^*$, khi đó $d(z, z^*) = d(Tz, Tz^*) \leq \alpha d(z, z^*)$ suy ra $d(z, z^*) = 0$ hay $z = z^*$.

Bổ đề 3.2. Cho X là tập khác rỗng bất kì và ánh xạ $T: X \rightarrow X$, hai số thực q_1, q_2 sao cho $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$ và số thực dương α thỏa $\alpha q_1, \alpha q_2 \in (0, 1)$. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:

- (i) Tồn tại một (q_1, q_2) -metric đầy đủ d trong X thỏa $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.
- (ii) Tồn tại một hàm $\varphi: X \rightarrow [0, +\infty)$ sao cho $\varphi^{-1}(\{0\})$ là tập một phần tử và bất đẳng thức $\varphi(Tx) \leq \alpha \varphi(x)$ thỏa mãn với mọi $x \in X$.

Chứng minh

(i) $\Rightarrow$ (ii) Theo nguyên lý ánh xạ co Banach cho (q_1, q_2) -metric thì T có điểm bất động z . Đặt $\varphi(x) := d(x, z)$, từ đó suy ra (ii). Thật vậy, với mọi $x \in X$ mà $\varphi(x) = 0$ thì $d(x, z) = 0$ hay $x = z$, suy ra $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$ hay $\varphi^{-1}(\{0\})$ là tập một phần tử. Hơn nữa, ta có $\varphi(Tx) = d(Tx, z) = d(Tx, Tz) \leq \alpha d(x, z) = \alpha \varphi(x)$ với mọi $x \in X$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Định nghĩa d như sau:

$$d(x, y) := \begin{cases} \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}, & \text{nếu } x \neq y \\ 0 & \text{nếu } x = y. \end{cases}$$

Khi đó d là một (q_1, q_2) -metric với mọi $x, y \in X$. Thật vậy, dễ dàng kiểm tra được d thỏa mãn (qi), (qii). Ta chỉ cần kiểm tra (qiii). Với mọi $x, y, z \in X$,

Nếu x, y, z khác nhau từng đôi một thì

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max\{\varphi(x), \varphi(z)\} \leq \varphi(x) + \varphi(z) \\ &\leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} + \max\{\varphi(y), \varphi(z)\} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z). \end{aligned}$$

Những trường hợp khác dễ dàng kiểm tra được

$$d(x, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z), \forall x, y, z \in X.$$

Hơn nữa, $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Thật vậy, với mọi $x, y \in X$

Nếu $Tx \neq Ty$ thì $x \neq y$, khi đó

$$d(Tx, Ty) = \max\{\varphi(Tx), \varphi(Ty)\} \leq \max\{\alpha\varphi(x), \alpha\varphi(y)\} = \alpha d(x, y).$$

Nếu $Tx = Ty$ thì $d(Tx, Ty) = 0 \leq \alpha d(x, y)$.

Tiếp theo cho $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy, giả sử x_n chỉ nhận hữu hạn các giá trị $A = a_1, a_2, \dots, a_h$ với $h \in \mathbb{N}$. Khi đó, tồn tại ít nhất một phần tử $b \in A$ sao cho có vô hạn phần tử của dãy x_n nhận giá trị này. Do đó tồn tại một dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy x_n là dãy hằng và $x_{k_n} = b$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Trường hợp nếu $\{x_n\}$ có vô hạn phần tử phân biệt, khi đó tồn tại dãy con $\{x_{k_n}\}$ của dãy $\{x_n\}$ bao gồm các phần tử phân biệt khác z . Do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, p \in \mathbb{N}$. Khi đó với mọi $k_n \geq n \geq n_0$ thì $\max\{\varphi(x_{k_n}), \varphi(x_{k_n+p})\} = d(x_{k_n}, x_{k_n+p}) < \varepsilon$, suy ra $\varphi(x_{k_n}) < \varepsilon$. Giả sử $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$ hay $\varphi(z) = 0$, xét $d(x_{k_n}, z) = \max\{\varphi(x_{k_n}), \varphi(z)\} = \varphi(x_{k_n}) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$, do đó dãy $\{x_{k_n}\}$ hội tụ về z suy ra $\{x_n\}$ hội tụ về z . Do đó d là (q_1, q_2) -metric đầy đủ trên X .

Định lý 3.3. Cho X là một tập khác rỗng bất kì, ánh xạ $T: X \rightarrow X$, hai số thực q_1, q_2 thỏa mãn $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$ và số thực dương α thỏa $\alpha q_1, \alpha q_2 \in (0, 1)$. Khi đó, nếu T^n có duy nhất một điểm bất động với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì tồn tại một (q_1, q_2) -metric đầy đủ d sao cho $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.

Chứng minh

Để chứng minh định lý này, chúng tôi sử dụng Bổ đề 3.2. Để tìm ánh xạ φ trong mục (ii) của Bổ đề 3.2, đầu tiên, xây dựng một tập hợp Φ gồm tất cả các ánh xạ xác định trên các tập con của X có các tính chất như φ trong mục (ii) của Bổ đề 3.2. Tiếp theo, sử dụng bổ đề Zorn, chúng tôi chỉ ra tập Φ có phần tử tối đại φ_0 , hơn nữa tập nguồn của φ_0 chính là X . Cuối cùng, phần tử tối đại φ_0 chính là ánh xạ φ cần tìm. Chi tiết sẽ được trình bày dưới đây.

Giả sử $z = Tz$, khi đó $z = T^n z$, với mọi $n \in \mathbb{N}$ hay z là điểm bất động duy nhất của T^n với mọi $n \in \mathbb{N}$. Đặt $s = \max\{q_1, q_2\} \geq 1$ và

$$\begin{aligned} \Phi &:= \{\varphi: D_\varphi \rightarrow [0, +\infty) \mid \{z\} \subseteq D_\varphi \subseteq X, \varphi^{-1}(\{0\}) = \{z\}, \\ &\quad T(D_\varphi) \subseteq D_\varphi \text{ và } \varphi(Tx) \leq \alpha\varphi(x), \forall x \in D_\varphi\}. \end{aligned}$$

Khi đó $\Phi \neq \emptyset$ vì nếu ta đặt $D_{\varphi_*} := \{z\}$ và $\varphi_*(z) := 0$ thì $\varphi_* \in \Phi$. Ta trang bị cho Φ một quan hệ thứ tự như sau:

$$\varphi_1 \preceq \varphi_2 \Leftrightarrow D_{\varphi_1} \subseteq D_{\varphi_2} \text{ và } \varphi_2|_{D_{\varphi_1}} = \varphi_1.$$

Nếu Φ_0 là một tập con sắp thứ tự toàn phần trong $(\Phi, \preceq)$, thì ta đặt $D := \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} D_\varphi$ thì ta có $T(D) = T(\bigcup_{\varphi \in \Phi_0} D_\varphi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} T(D_\varphi) \subseteq \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} D_\varphi = D$ và ta xác định $\psi: D \rightarrow [0, +\infty)$ bởi $\psi(x) := \varphi(x)$ nếu $x \in D_\varphi, \varphi \in \Phi_0$. Khi đó, ta có $\{z\} \subseteq D \subseteq X$ và $\psi^{-1}(\{0\}) =$

$\{z\}$ (vì $\psi(z) = \varphi(z) = 0$ ($z \in D_\varphi, \varphi \in \Phi_0$)) nên $\{z\} \subset \psi^{-1}(\{0\})$. Lấy $x \in \psi^{-1}(\{0\}) \subset D$ bất kì suy ra tồn tại $\varphi \in \Phi_0$ sao cho $\psi(x) = \varphi(x) = 0$, suy ra $x = z$, vì vậy $\psi^{-1}(\{0\}) \subset \{z\}$ và $\psi(Tx) \leq \alpha\psi(x), \forall x \in D$ (vì với mọi $x \in D = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} D_\varphi$, tồn tại $\varphi \in \Phi_0$ sao cho $x \in D_\varphi$ và $\psi(Tx) = \varphi(Tx) \leq \alpha\varphi(x) = \alpha\psi(x)$). Do đó $\psi \in \Phi$. Hơn nữa, với mọi $\varphi \in \Phi_0$ thì ta có $D_\varphi \subseteq D$ và $\psi|_{D_\varphi} = \varphi$ nên $\varphi \leq \psi$ và do đó ψ là một chặn trên của Φ_0 . Theo bổ đề Zorn, tồn tại phần tử tối đại $\varphi_0: D_0 \rightarrow [0, +\infty)$ trong $(\Phi, \leq)$.

Bây giờ ta cần chỉ ra $D_0 = X$, ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử tồn tại $x_0 \in X \setminus D_0$. Đặt $O(x_0) := \{T^{n-1}(x_0): n \in \mathbb{N}\}$ suy ra $T(O(x_0)) \subseteq O(x_0)$.

Giả sử $O(x_0) \cap D_0 = \emptyset$, đặt $D_\varphi := O(x_0) \cup D_0$. Xét ánh xạ $\varphi: D_\varphi \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi $\varphi|_{D_0} = \varphi_0$ và $\varphi(T^{n-1}x_0) = \alpha^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta được $\{z\} \subseteq D_\varphi \subseteq X, T(D_\varphi) = T(O(x_0) \cup D_0) = T(O(x_0)) \cup T(D_0) \subseteq D_\varphi$, $\varphi^{-1}(\{0\}) = \varphi_0^{-1}(\{0\}) = \{z\}$ và $\varphi(Tx) \leq \alpha\varphi(x)$ với mọi $x \in D_\varphi$. (Vì $\varphi(Tx) = \varphi_0(Tx) \leq \alpha\varphi_0(x) = \alpha\varphi(x)$ nếu $x \in D_0$ và $\varphi(Tx) = \varphi(T(T^{n-1}x_0)) = \varphi(T^n x_0) = \alpha \cdot \alpha^{n-1} = \alpha\varphi(T^{n-1}x_0) = \alpha\varphi(x)$ nếu $x \in O(x_0)$).

Do đó $\varphi \in \Phi$, mà theo định nghĩa của φ thì $\varphi_0 \leq \varphi$ và $\varphi \neq \varphi_0$. Mặt khác, vì φ_0 là phần tử tối đại nên từ $\varphi_0 \leq \varphi$ suy ra $\varphi = \varphi_0$ (mâu thuẫn). Vậy $O(x_0) \cap D_0 \neq \emptyset$, khi đó, gọi $m = \min\{n \in \mathbb{N}: T^n x_0 \in D_0\}$. Suy ra $T^{m-1}x_0 \notin D_0$, đặt $D_\varphi := \{T^{m-1}x_0\} \cup D_0$ thì $T(D_\varphi) = T(\{T^{m-1}x_0\} \cup D_0) = T(\{T^{m-1}x_0\}) \cup T(D_0) = \{T^m x_0\} \cup T(D_0) = T(D_0) \subseteq D_0$.

Xét ánh xạ $\varphi: D_\varphi \rightarrow [0, +\infty)$ được xác định như sau:

$\varphi|_{D_0} := \varphi_0, \varphi(T^{m-1}x_0) := 1$ nếu $T^m x_0 = z$ và $\varphi(T^{m-1}x_0) := \varphi_0(T^m x_0)/\alpha$ nếu $T^m x_0 \neq z$. Khi đó $\{z\} \subseteq D_\varphi \subseteq X, \varphi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$ (do $\varphi(x) \neq 0$ với mọi $x \in D_0 \setminus \{z\}$ và $\varphi(T^{m-1}x_0) \neq 0$) và $\varphi(Tx) \leq \alpha\varphi(x)$ (vì $\varphi(Tx) = \varphi_0(Tx) \leq \alpha\varphi_0(x) = \alpha\varphi(x) \forall x \in D_0$, $\varphi(T(T^{m-1}x_0)) = \varphi(T^m x_0) = \varphi(z) = 0 < \alpha = \alpha\varphi(T^{m-1}x_0)$ nếu $T^m x_0 = z$ và $\varphi(T(T^{m-1}x_0)) = \varphi(T^m x_0) = \varphi_0(T^m x_0) = \alpha\varphi(T^{m-1}x_0)$ nếu $T^m x_0 \neq z$).

Vì vậy $\varphi \in \Phi, \varphi \neq \varphi_0$ và $\varphi_0 \leq \varphi$. Mặt khác, vì φ_0 là phần tử tối đại nên từ $\varphi_0 \leq \varphi$ suy ra $\varphi = \varphi_0$ (mâu thuẫn). Do đó $D_0 = X$, như vậy ta có được $\varphi_0: X \rightarrow [0, +\infty)$ thỏa mãn $\varphi_0^{-1}(\{0\}) = \{z\}$ hay $\varphi_0^{-1}(\{0\})$ là tập một phần tử và $\varphi_0(Tx) \leq \alpha\varphi_0(x)$ với mọi $x \in X$. Áp dụng Bổ đề 3.2 suy ra điều phải chứng minh.

4. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã chứng minh được định lý đảo Bessaga cho không gian (q_1, q_2) -metric. Kết quả chính của bài báo phát biểu rằng: Cho X là một tập khác rỗng bất kì, ánh xạ $T: X \rightarrow X$, hai số thực q_1, q_2 thỏa mãn $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$ và số thực dương α thỏa $\alpha q_1, \alpha q_2 \in (0, 1)$. Khi đó, nếu T^n có duy nhất một điểm bất động với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì tồn tại một (q_1, q_2) -metric đầy đủ d sao cho $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Từ những kết quả đạt được, bài báo mở ra một số hướng nghiên cứu tiềm năng trong tương lai. Cụ thể, chúng tôi hướng đến việc mở rộng định lý đảo Bessaga cho các lớp ánh xạ co với điều kiện co khác. Bên cạnh đó, việc đi sâu vào nghiên cứu các đặc trưng topo của cấu trúc không gian (q_1, q_2) -metric hứa hẹn sẽ mang lại những góc nhìn mới mẻ và thú vị.

Tài liệu tham khảo

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133–181. <https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181>

- Bessaga, C. (1959). On the converse of Banach “fixed-point principle.” *Colloquium Mathematicum*, 7(1), 41–43. <https://doi.org/10.4064/cm-7-1-41-43>
- Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1(1), 5–11.
- Doan, H. (2021). A new type of Kannan’s fixed point theorem in strong b-metric spaces. *AIMS Mathematics*, 6(7), 7895–7908. <https://doi.org/10.3934/math.2021458>
- Lu, N., He, F., & Du, W. S. (2019). Fundamental questions and new counterexamples for b-metric spaces and Fatou Property. *Mathematics*, 7(11), 1107. <https://doi.org/10.3390/math7111107>
- Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728(1), 183–197. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1994.tb44144.x>
- Mlaiki, N., Aydi, H., Souayah, N., & Abdeljawad, T. (2018). Controlled metric type spaces and the related contraction principle. *Mathematics*, 6(10), 194. <https://doi.org/10.3390/math6100194>
- Mustafa, Z., & Sims, B. (2006). A new approach to generalized metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7(2), 289–297.
- Sedghi, S., Shobe, N., & Aliouche, A. (2012). A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces. *Matematicki Vesnik*, 64(3), 258–266.
- Sengupta, R., & Zhukovskiy, S. E. (2019). Minima of functions on (q_1, q_2) -quasimetric spaces. *Eurasian Mathematical Journal*, 10(2), 84–92. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2019-10-2-84-92>