



DOI: <https://doi.org/10.52714/dthu.ssh.3034.2041>

ỨNG DỤNG MỘT SỐ LỚP ĐỒ THỊ TRONG NỘI DUNG MÔN TOÁN DÀNH CHO LỚP CHUYÊN VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG CÁC KỲ THI HỌC SINH GIỎI

Nguyễn Minh Tiến¹ và Ngô Tấn Phúc^{2*}

¹*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

²*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam*

**Tác giả liên hệ, Email: ntphuc@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 24/12/2025; Ngày nhận chỉnh sửa: 11/7/2026; Ngày duyệt đăng: 21/7/2026

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày việc vận dụng một số lớp đồ thị cơ bản vào giải các bài toán trong chương trình Toán chuyên và trong các kỳ thi học sinh giỏi. Chúng tôi đề xuất một quy trình giúp mô hình hóa bài toán sơ cấp thành bài toán đồ thị, qua đó khai thác được các định lý và tính chất đặc trưng của đồ thị để tìm lời giải ngắn gọn và sáng tạo hơn. Bài báo minh họa quy trình này bằng các ví dụ cụ thể, trong đó có các bài toán từ VMO và IMO. Đóng góp chính của bài viết là làm rõ quy trình ba bước và cách chuyển đổi ngôn ngữ để giải một bài toán cụ thể, từ đó nhấn mạnh khả năng ứng dụng trực tiếp trong dạy học, khác với các tài liệu trước chủ yếu tập trung vào lý thuyết. Qua đó, chúng tôi mong muốn góp phần giúp giáo viên và học sinh nhìn nhận rõ hơn vai trò của lý thuyết đồ thị trong bồi dưỡng học sinh chuyên Toán.

Từ khóa: *Lý thuyết đồ thị, Mô hình hoá, Toán chuyên, Toán học sinh giỏi.*

Trích dẫn: Nguyễn, M. T., & Ngô, T. P. (2026). Ứng dụng một số lớp đồ thị trong nội dung môn toán dành cho lớp chuyên vào việc giải một số bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp - Chuyên san Khoa học Xã hội và Nhân văn, Online First*, 1-12. <https://doi.org/10.52714/dthu.ssh.3034.2041>

Copyright © 2026 The author(s). This work is licensed under a CC BY-NC 4.0 License.

APPLICATIONS OF SOME GRAPH CLASSES IN SOLVING MATHEMATICAL OLYMPIAD PROBLEMS FOR GIFTED STUDENTS

Nguyen Minh Tien¹ and Ngo Tan Phuc^{2*}

¹*Student, Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education, Dong Thap University, Vietnam*

²*Faculty of Mathematics - Informatics Teacher Education, School of Education, Dong Thap University, Vietnam*

**Corresponding author, Email: ntphuc@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 24/12/2025; Received in revised form: 11/7/2026; Accepted: 21/7/2026

Abstract

This paper presents the application of fundamental graph classes to solving problems in the mathematics curriculum for gifted students and mathematical olympiads. A procedure is set to model elementary problems as graph problems, thereby leveraging graph theorems and characteristic properties to derive solutions that are both concise and creative. This paper illustrates this procedure through specific examples, including problems selected from the VMO and IMO. The main contribution of this paper is to clarify a three - step procedure and the process of transforming between languages to solve a specific mathematical problem, thereby highlighting the direct applicability in teaching, in contrast to previous studies that primarily focus on theoretical aspects. Consequently, it contributes to enhancing teachers' and students' insight into the role of graph theory in fostering gifted mathematics students.

Keywords: *Graph theory, Mathematical modeling, Olympiad problems, Specialized mathematics.*

1. Mở đầu

Lý thuyết đồ thị là một lĩnh vực Toán học khá độc lập, dễ tiếp cận và có rất nhiều ứng dụng trong các ngành khoa học khác nhau. Xu hướng sử dụng lý thuyết đồ thị trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi cũng được thể hiện rõ nét gần đây. Nội dung này được đưa vào giảng dạy cho học sinh phổ thông trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán ban hành kèm theo Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Theo đó, nội dung dạy học môn Toán dành cho học sinh lớp 11 ngoài các nội dung cố định trong sách giáo khoa còn có ba chuyên đề gồm Phép biến hình phẳng, Lý thuyết đồ thị và Một số yếu tố về kỹ thuật. Bên cạnh đó, lý thuyết đồ thị cũng xuất hiện trong nội dung dạy học môn Toán dành cho lớp chuyên theo Thông tư 22/2025/TT-BGDĐT ngày 30/9/2025 của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Kiến thức về lý thuyết đồ thị được quy định trong Công văn này là mở rộng và nâng cao hơn so với nội dung dành cho học sinh phổ thông.

Chúng tôi nhận thấy rằng lý thuyết đồ thị là một công cụ mạnh mẽ nhưng chưa được khai thác sâu trong chương trình phổ thông. Nhiều bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi, dù không được phát biểu dưới dạng đồ thị, nhưng lại có thể được giải một cách ngắn gọn, sáng sủa hơn nếu biết mô hình hóa bằng ngôn ngữ đồ thị. Trong nước và trên thế giới, đã có nhiều tác giả nghiên cứu về việc ứng dụng lý thuyết đồ thị để giải một số bài toán sơ cấp. Chẳng hạn, Green (2002) đã nghiên cứu ứng dụng định lý Ramsey vào việc giải một số bài toán IMO, Nguyễn (2008) đã tìm hiểu việc giải một số bài toán có thuật toán cho học sinh chuyên tin bằng cách sử dụng lý thuyết đồ thị phẳng và sắc số trên đồ thị, Holton (2009) đã giới thiệu các phương pháp tiếp cận bài toán Olympic toán học, bao gồm cả việc sử dụng lý thuyết đồ thị như một công cụ hỗ trợ giải toán, Đặng và Lê (2012) đã trình bày khá đầy đủ về các khía cạnh khác nhau của lý thuyết đồ thị và việc vận dụng để giải một số bài toán sơ cấp, Nông (2016) cũng tìm hiểu việc giải một số bài toán thi học sinh giỏi nhờ vào đồ thị phẳng và cây trong đồ thị, Li và cộng sự (2020) đã sử dụng biểu diễn đồ thị để mô hình hóa và giải quyết các bài toán toán học được phát biểu bằng ngôn ngữ tự nhiên, Suksompong (2020) đã nghiên cứu ứng dụng của chu trình trong đồ thị vào việc giải một số bài toán Olympic toán học, Wahyuningsih và cộng sự (2020) đã phát triển công cụ học tập trực tuyến để dạy ứng dụng lý thuyết đồ thị trong giải toán sáng tạo, Lê (2018) và Lê (2021) đã nghiên cứu một số ứng dụng của phép tô màu đồ thị, Lipovetsky (2023) đã tổng hợp các kỹ thuật giải bài toán Olympic toán học, trong đó đề cập đến vai trò của lý thuyết đồ thị... Tuy nhiên, các tài liệu trên còn nặng về tính học thuật và chưa chú trọng vào tính sư phạm của vấn đề nghiên cứu. Đặc biệt, các lớp đồ thị xuất hiện trong tài liệu trên chưa mang tính hệ thống theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018 và Thông tư 22/2025/TT-BGDĐT về các nội dung dạy học cho học sinh trường chuyên, cho thấy còn một khoảng trống nghiên cứu cần được bổ sung và hoàn thiện.

Xuất phát từ thực tiễn đó, bài viết này nhằm giới thiệu cách vận dụng một số lớp đồ thị cơ bản (như đồ thị hai phần, đồ thị đầy đủ, đồ thị phẳng, ma trận kề,...) vào việc giải các bài toán quen thuộc và nâng cao trong chương trình dành cho lớp chuyên. Dựa trên các tài liệu tham khảo, đặc biệt là Lê (2017) và Nguyễn (2014), bài viết trình bày có hệ thống quy trình ba bước mô hình hóa bài toán phổ thông thành bài toán đồ thị. Điểm nổi bật của bài viết là làm rõ việc chuyển đổi ngôn ngữ giữa tính chất của đồ thị và giả thiết của bài toán, minh họa bằng các ví dụ thực tế từ các kỳ thi VMO, IMO,... Các bài toán được chúng tôi lựa chọn là những bài toán có trong các cuộc thi gần nhất hoặc điển hình nhất cho các lớp đồ thị. Quy trình ba bước và cách chuyển đổi ngôn ngữ được làm rõ, qua đó giúp giáo viên và học sinh có một phương pháp tiếp cận nhất quán khi gặp các bài toán có thể mô hình hóa bằng đồ thị. Đặc biệt, bài viết mang tính thời sự khi cập nhật một số bài toán xuất hiện gần đây trong các kỳ thi do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức. Về tiêu chí lựa chọn các bài toán minh họa, ngoài tính thời sự, chúng tôi còn tập trung vào các bài

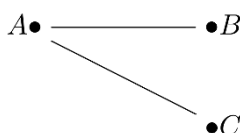
toán liên quan đến các lớp đồ thị được quy định trong Thông tư 22/2025/TT-BGDĐT ngày 30/9/2025 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

2. Sơ lược về đồ thị

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản về lý thuyết đồ thị theo các tài liệu (Rosen, 2007) và (Ngô, 2004).

Một *đồ thị vô hướng* là một bộ $G = (V, E)$ bao gồm một tập hợp V các điểm (còn gọi là *đỉnh* của đồ thị) và một tập hợp E các đoạn thẳng hoặc đường cong nối các đỉnh đó (còn gọi là *cạnh* của đồ thị). Cạnh nối hai đỉnh A, B được ký hiệu là AB hoặc BA . Nếu hai đầu mút của một cạnh trùng nhau, cạnh đó gọi là *khuyên*. Hai đỉnh A, B được gọi là *kề nhau* nếu tồn tại một cạnh nối chúng. Một đỉnh không phải đầu mút của bất kỳ cạnh nào gọi là *đỉnh cô lập*. Đồ thị vô hướng không có khuyên và không có cạnh kép được gọi là *đồ thị đơn*.

Ví dụ 1. Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, trong đó $V = \{A, B, C\}$ và $E = \{AB, AC\}$ được minh họa bởi hình vẽ sau:



Hình 1. Đồ thị vô hướng

Trong một đồ thị G , một dãy cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp là hai cạnh có chung một đỉnh) $AB, BC, CD, \dots, MN, NP$ được gọi là một *đường đi* từ đỉnh A (đỉnh đầu) đến đỉnh P (đỉnh cuối), kí hiệu $ABCD \dots MNP$. Một đường đi được gọi là một *chu trình* nếu đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

Đồ thị vô hướng G được gọi là *liên thông* nếu giữa mọi cặp đỉnh phân biệt bất kỳ của nó đều có đường đi. Cho đồ thị G , đường đi đi qua mọi đỉnh của G và mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là *đường đi Hamilton* trong G . Một đường đi Hamilton mà đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối thì được gọi là *chu trình Hamilton* trong G .

3. Ứng dụng mở đầu

Trong phần này, chúng tôi trình bày lại một kết quả kinh điển trong lý thuyết đồ thị, đó là Định lý bắt tay và một số ứng dụng của Định lý này.

Cho đồ thị G , giả sử A là một đỉnh bất kỳ của đồ thị. Số cạnh phát ra tại A được gọi là *bậc của A* , kí hiệu $d(A)$.

Định lý 1 (Định lý bắt tay). Trong một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần tổng tất cả các cạnh của G , nghĩa là:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Ý tưởng chứng minh: Vì mỗi cạnh trong đồ thị vô hướng nối hai đỉnh lại với nhau, nên khi tính tổng bậc của tất cả các đỉnh, mỗi cạnh sẽ được đếm đúng hai lần (mỗi lần cho mỗi đầu mút của nó). Vậy tổng bậc của tất cả các cạnh chính bằng hai lần số cạnh trong đồ thị. $\square$

Chúng ta xét một tình huống thực tế có thể ứng dụng ngay Định lý trên như sau.

Bài toán 1. Một nhóm sinh viên có 11 thành viên. Buổi họp đầu tiên của nhóm vào dịp đầu năm học. Bạn An đã phát hiện ra điều thú vị rằng mỗi bạn trong nhóm đã quen đúng 3 bạn

khác. Ngay lập tức bạn Bình đứng lên bác bỏ phát hiện đó. Trong hai bạn An và Bình, ai nói đúng? Vì sao?

Lời giải:

Cách 1: Lập luận bằng ngôn ngữ thông thường

Giả sử phát hiện của An là đúng, nghĩa là mỗi người quen đúng 3 người khác trong nhóm.

Vì nhóm có tất cả 11 thành viên và mỗi người quen đúng 3 người, nên có tất cả $11 \cdot 3 = 33$ mối quan hệ tính từ tất cả các thành viên trong nhóm

Mỗi mối quan hệ giữa hai người trong cách đếm trên được tính 2 lần.

Do đó, số mối quan hệ thực sự phải bằng $\frac{33}{2} = 16,5$. Điều này vô lý vì mối quan hệ giữa hai người phải là một số nguyên.

Vậy điều trên mâu thuẫn với giả thiết.

Do đó, phát hiện của bạn An về số người quen của mỗi bạn trong nhóm là sai. Do đó, bạn Bình nói đúng.

Cách 2: Lập luận bằng lý thuyết đồ thị

Dựa vào giả thiết của bài toán, ta chuyển bài toán về ngôn ngữ đồ thị với 11 sinh viên tương ứng với 11 đỉnh của đồ thị và cạnh của đồ thị biểu diễn cho sự quen nhau của 2 bạn.

Vì mỗi bạn đều quen biết với đúng 3 bạn, nên mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc là 3.

Theo Định lý bắt tay, số cạnh của đồ thị là $\frac{33}{2} = 16,5$ (vô lý).

Phát hiện của bạn An về số người quen của mỗi bạn trong tổ là sai. Do đó, bạn Bình nói đúng. $\square$

Thông qua hai cách giải cụ thể của bài toán trên, chúng ta thấy rằng việc vận dụng lý thuyết đồ thị vào giải toán sẽ giúp chúng ta tư duy, định hướng giải bài toán theo góc nhìn tổng quát. Từ đó, chúng tôi đề xuất những lưu ý và quy trình 3 bước về việc ứng dụng lý thuyết đồ thị để giải bài toán phổ thông

Lưu ý 1 (Lê, 2017, tr. 33-34). Một số dấu hiệu bài toán có thể mô hình hóa thành một vấn đề của lý thuyết đồ thị.

Khi mô hình hóa một bài toán bằng lý thuyết đồ thị, ta chuyển các đối tượng và các quan hệ trong bài toán gốc thành các đỉnh và các cạnh trong bài toán đồ thị. Chẳng hạn ở Bài toán 1, mỗi học sinh tương ứng với mỗi đỉnh và hai học sinh quen biết nhau tương ứng với một cạnh nối hai đỉnh trong đồ thị.

Lưu ý 2 (Lê, 2017, tr. 33-34; Nguyễn, 2014, tr. 14-15). Khi dùng lý thuyết đồ thị để giải bài toán gốc, ta cần thực hiện 3 bước sau:

Bước 1. Xác định các đối tượng và các quan hệ trong bài toán gốc chuyển thành các đỉnh (là các điểm trong mặt phẳng hoặc không gian) và các cạnh (hay cung).

Ta cần chú ý tính chất của các quan hệ để xây dựng các đồ thị thích hợp. Chẳng hạn, quan hệ giữa các đối tượng có tính đối xứng (không có tính đối xứng) tương ứng với đồ thị vô hướng (có hướng); quan hệ giữa các đối tượng có nhiều tính chất khác nhau tương ứng với tô màu đồ thị; quan hệ giữa các đối tượng chia làm hai loại tương ứng với đồ thị hai phần; quan hệ giữa các

đối tượng liên tiếp nhau tương ứng với đường đi hoặc chu trình; quan hệ khép kín giữa các đỉnh và cạnh tương ứng với đồ thị liên thông.

Bước 2. Dựa vào các kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc bằng lập luận trực tiếp, ta tìm ra đáp án của bài toán đồ thị.

Bước 3. Phát biểu lại kết quả thu được về ngôn ngữ của bài toán gốc.

Chúng ta làm rõ quy trình ba bước ở trên thông qua việc giải một số bài toán sau đây.

Bài toán 2 (IMO 1988). Giả sử n là một số nguyên dương và $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ là các tập hợp con của một tập hợp B cho trước.

Giả sử rằng

- (1) Mỗi A_i có đúng $2n$ phần tử;
- (2) Mỗi $A_i \cap A_j$ ($1 \leq i < j \leq 2n + 1$) có đúng một phần tử;
- (3) Mỗi phần tử của B đều thuộc ít nhất hai tập con A_i .

Hỏi với giá trị nào của n thì chúng ta có thể đánh dấu mọi phần tử của B bởi các con số 0 và 1 sao cho A_i có đúng n phần tử được đánh số 0.

Lời giải:

Trước tiên chúng ta chứng minh rằng điều kiện (3) có thể được thay thế bởi điều kiện

(3') Mỗi phần tử của B đều thuộc đúng hai tập hợp con A_i .

Thật vậy, giả sử tồn tại một phần tử $a_0 \in B$ và $a_0 \in A_i \cap A_l \cap A_k$. Theo điều kiện (2) thì mỗi tập con khác A_i, A_k, A_l sẽ có chung một phần tử với A_i . Có $2n - 2$ tập con loại này. Các phần tử trong A_i gồm a_0 và $2n - 2$ phần tử chung với các tập nói trên. Vậy số phần tử trong A_i là $1 + (2n - 2) = 2n - 1$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện (1). Do đó, mỗi phần tử của B đều thuộc đúng hai tập con A_i .

Từ nhận định trên, chúng ta sẽ phân tích bài toán và xây dựng lời giải theo quy trình ba bước ở trên như sau.

Bước 1. Xác định các đối tượng và các quan hệ trong bài toán gốc. Ta có thể xét một đồ thị với các đỉnh v_i đại diện cho một tập hợp A_i và mọi cạnh $(v_i, v_j) = e_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq 2n + 1, i \neq j$) đại diện cho phần tử chung của A_i, A_j . Khi đó đồ thị thu được là đồ thị đầy đủ K_{2n+1} .

Vấn đề của bài toán trở thành: Với giá trị nào của n thì chúng ta có thể đánh dấu các cạnh của đồ thị K_{2n+1} là 0 và 1 sao cho có đúng n cạnh bất kỳ được đánh số 0?

Bước 2. Dựa vào các kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc bằng lập luận trực tiếp, ta tìm ra đáp án của bài toán đồ thị. Trong lý thuyết đồ thị, ta biết K_{2n+1} có $n(2n + 1)$ cạnh. Nếu yêu cầu của việc đánh số có thể làm được, thì có $\frac{1}{2}n(2n + 1)$ cạnh được đánh số 0. Vì thế n phải là số chẵn.

Ngược lại, nếu $n = 2m$ là chẵn, chúng ta gán cạnh $(v_i, v_{i-m}), (v_i, v_{i-m+1}), \dots, (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), \dots, (v_i, v_{i+m}), i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ là 0, nếu không thì là 1 trong K_{2n+1} . Phương pháp này đáp ứng yêu cầu (chú ý $v_{(2n+1)+i} = v_i$).

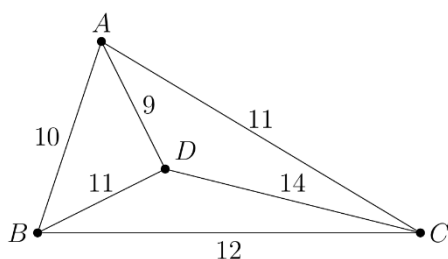
Vậy n là số chẵn thì thỏa yêu cầu bài toán.

Bước 3. Phát biểu lại kết quả thu được về ngôn ngữ của bài toán gốc. Với n chẵn thì chúng ta có thể đánh dấu mọi phần tử của B bởi các con số 0 và 1 sao cho A_i có đúng n phần tử được đánh số 0. $\square$

Trong Bài toán 2, nếu giải bằng phương pháp truyền thống thì phải dùng nguyên lý Dirichlet và các phép đếm phức tạp, khó khái quát hóa. Trong khi, dùng phương pháp đồ thị thì rõ ràng trực quan hơn, dễ kiểm chứng và có thể minh họa với n nhỏ.

Trong phần còn lại của bài viết, quy trình ba bước ở trên sẽ được ẩn đi. Chúng tôi chỉ trình bày bài lời giải ngắn gọn cho các bài toán.

Bài toán 3 (Đề minh họa môn Toán tốt nghiệp THPT 2025). Một trò chơi điện tử quy định như sau: Có 4 trụ A, B, C, D với số lượng các thử thách trên đường đi giữa các cặp trụ được mô tả trong hình bên. Người chơi xuất phát từ một trụ nào đó, đi qua tất cả các trụ còn lại, mỗi khi đi qua một trụ thì trụ đó sẽ bị phá hủy và không thể quay trở lại trụ đó được nữa, nhưng người chơi vẫn phải trở về trụ ban đầu. Tổng số thử thách của đường đi thỏa mãn điều kiện trên nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



Hình 3. Đề minh họa môn Toán tốt nghiệp THPT 2025

Đối với bài toán này, ta cần kiểm tra 24 trường hợp để tìm ra đường đi thỏa yêu cầu bài toán. Tuy nhiên, việc mô hình hóa bài toán bằng đồ thị giúp rút ngắn đáng kể quá trình giải và làm nổi bật hiệu quả của việc vận dụng lý thuyết đồ thị.

Lời giải:

Dựa vào giả thiết của bài toán, ta đưa bài toán về ngôn ngữ đồ thị với 4 trụ tương ứng với 4 đỉnh, các đường đi giữa hai trụ tương ứng với các cạnh và số thử thách trên đường đi tương ứng với trọng số của cạnh trong đồ thị.

Vì vai trò của các đỉnh trong đồ thị này là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử đỉnh đầu là A . Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm đường đi ngắn nhất của một chu trình Hamilton có đỉnh đầu là A . Tất cả các chu trình Hamilton có đỉnh đầu là A đều thuộc một trong 3 loại sau:

$ABDCA$ có tổng độ dài là 46, $ADCBA$ có tổng độ dài là 45, $ACBDA$ có tổng độ dài là 43.

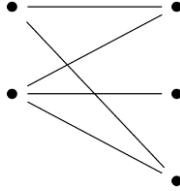
Do đó, tổng số thử thách của đường đi thỏa mãn yêu cầu bài toán nhận giá trị nhỏ nhất là 43. $\square$

4. Đồ thị hai phần

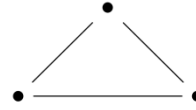
Trong phần này, chúng tôi minh họa một ứng dụng của đồ thị hai phần vào việc giải quyết một tình huống cụ thể trong kỳ thi học sinh giỏi Toán cấp Quốc gia.

Đồ thị hai phần (đồ thị lưỡng phân) là đồ thị mà trong đó các đỉnh có thể được chia thành hai tập không giao nhau sao cho không có cạnh nối hai đỉnh bất kì thuộc cùng một tập. Một đồ thị G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi mọi chu trình trong G đều có độ dài chẵn.

Ví dụ 2. Xét hai đồ thị sau:



Hình 4. Đồ thị G



Hình 5. Đồ thị H

Đồ thị G là đồ thị hai phần vì ta thấy đồ thị thỏa mãn điều kiện của định nghĩa của đồ thị hai phần hoặc ta có thể kiểm tra và thấy rằng các chu trình của đồ thị đều có độ dài chẵn.

Đồ thị H không là đồ thị hai phần vì nó tồn tại một chu trình lẻ.

Bài toán 4 (VMO 2024). Trong không gian, cho đa diện lồi D sao cho tại mỗi đỉnh của D có đúng một số chẵn các cạnh chứa đỉnh đó. Chọn ra một mặt F của D . Giả sử ta gán cho mỗi cạnh của D một số nguyên dương sao cho điều kiện sau được thỏa mãn: với mỗi mặt (khác mặt F) của D , tổng các số được gán với các cạnh của mặt đó là một số nguyên dương chia hết cho 2024. Chứng minh rằng tổng các số được gán với các cạnh của mặt F cũng là một số nguyên dương chia hết cho 2024.

Lời giải:

Vì D là đa diện lồi mà mỗi đỉnh có đúng một số chẵn các cạnh chứa đỉnh đó, nên khi ta nhúng D vào mặt phẳng ta được đồ thị phẳng G với các đỉnh có bậc chẵn.

Ta gọi G' là đồ thị đối ngẫu của G , được xác định như sau: mỗi miền của đồ thị G là một đỉnh trong đồ thị G' ; mỗi cạnh của đồ thị G' tương ứng với một cạnh chung của hai miền trong đồ thị G . Khi đó, G' cũng là một đồ thị phẳng.

Từ đây ta thấy rằng các miền của đồ thị phẳng G' chính là các đỉnh của đồ thị G . Vì G là đồ thị có các đỉnh đều có bậc chẵn, nên mọi miền trong G' đều có biên là các chu trình độ dài chẵn. Do đó G' là đồ thị hai phần. Ta chia tập đỉnh của đồ thị này thành hai tập rời nhau A và B . Tương ứng, ta đánh dấu các mặt của đa diện lồi D thành hai loại A và B . Không mất tính tổng quát, giả sử mặt F được xếp vào loại A .

Gọi S_A là tổng các cạnh của các mặt loại A và khác F , S_B là tổng các cạnh của các mặt loại B và S_F là tổng các cạnh của mặt F . Ta có tổng các cạnh của các mặt loại A cũng là tổng các cạnh của các mặt loại B , nghĩa là:

$$S_A + S_F = S_B.$$

Suy ra:

$$S_F = S_B - S_A.$$

Theo giả thiết, $S_A : 2024$ và $S_B : 2024$. Nên $S_F : 2024$. $\square$

5. Tính liên thông của đồ thị

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại khái niệm ma trận kề của đồ thị và ứng dụng của nó trong việc khảo sát tính liên thông. Qua đây chúng ta cũng thấy lợi ích của việc tính lũy thừa ma trận.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị với $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Khi đó *ma trận kề* của đồ thị G là ma trận

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$

Định lý 2 (Rosen, 2007, tr. 688). Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị với ma trận kề A theo thứ tự các đỉnh $v_i, i = \overline{1, n}$ (với các cạnh vô hướng hay cạnh bội, có thể có khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài r , từ v_i đến v_j trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r .

Hệ quả 1. Cho đồ thị $G = (V, E)$ có ma trận kề là A . Khi đó:

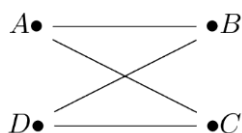
(1) Phần tử S_{ij} của ma trận

$$S = A + A^2 + \dots + A^n = (S_{ij})_n$$

chính là tổng số đường đi có độ dài từ 1 đến n từ đỉnh v_i đến v_j .

(2) Nếu mọi phần tử S_{ij} đều khác 0 thì có ít nhất một đường đi từ v_i đến v_j (hay đồ thị liên thông). Ngược lại nếu tồn tại $S_{ij} = 0$ thì không có đường đi từ v_i đến v_j (hay đồ thị không liên thông).

Bài toán 5. Cho đồ thị có tập đỉnh $\{A, B, C, D\}$ và tập cạnh $\{AB, AC, BD, CD\}$. Chỉ ra các đường đi độ dài bằng 3 từ đỉnh A đến đỉnh C trong đồ thị trên. Xét sự liên thông của đồ thị.



Hình 6. Minh họa Bài toán 5

Lời giải:

Theo giả thiết, ta có ma trận kề của đồ thị đã cho theo thứ tự A, B, C, D là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theo Định lí 2, có đúng 4 đường đi có độ dài bằng 3 đi từ A đến C . Kiểm tra trực tiếp trên đồ thị ra thấy các đường đi thỏa bài toán là $ABDC, ABAC, ACAC, ACDC$.

Tiếp theo, để xét tính liên thông của đồ thị, ta cần tính toán một số biểu thức sau.

$$\text{Ta có } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Khi đó } S = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vì các phần tử của ma trận S đều khác 0 nên đồ thị đã cho liên thông. $\square$

*** Tóm lược các lớp đồ thị được khai thác trong bài báo**

Bảng 1. Tóm tắt các lớp đồ thị và ứng dụng

Ví dụ minh họa	Lớp đồ thị	Định nghĩa/Tính chất	Định lý/Kỹ thuật chính	Dạng bài toán
Bài toán 1	Đồ thị vô hướng	Các cạnh không có hướng; bậc của đỉnh bằng số cạnh kề với đỉnh.	Định lý bắt tay: $\sum_{v \in V} d(v) = 2 E .$	Bài toán đếm, tính chẵn - lẻ, quan hệ đối xứng.
Bài toán 2	Đồ thị đầy đủ	Luôn tồn tại một cạnh nối giữa hai đỉnh; mỗi đỉnh có bậc $n - 1$; có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.	Đếm cạnh, phân hoạch cạnh, tô màu.	Bài toán tổ hợp, phân hoạch tập hợp.
Bài toán 3	Đồ thị có trọng số	Mỗi cạnh được gán một số (trọng số).	Bài toán tối ưu.	Bài toán tìm đường đi ngắn nhất/dài nhất.
Bài toán 4	Đồ thị hai phần	Các đỉnh chia thành hai tập rời nhau; không có cạnh nào nối hai đỉnh thuộc cùng một tập.	Không có chu trình độ dài lẻ	Bài toán phân loại, tô màu 2 màu.
Bài toán 4	Đồ thị phẳng	Biểu diễn được trên mặt phẳng và không có hai cạnh cắt nhau.	Công thức Euler: $V - E + F = 2$	Bài toán hình học, tô màu bản đồ.
Bài toán 5	Ma trận kề	Ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ trong đó, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$	Luỹ thừa ma trận kề mô tả số đường đi độ dài n .	Bài toán đếm đường đi, tính liên thông.

--	--	--	--	--

6. Kết luận

Bài viết đã giới thiệu một số hướng vận dụng lý thuyết đồ thị vào việc giải các bài toán trong chương trình Toán chuyên và các kỳ thi học sinh giỏi. Các ví dụ minh họa cho thấy, khi mô hình hóa bài toán bằng ngôn ngữ đồ thị, lời giải trở nên trực quan, ngắn gọn và mang tính khái quát cao hơn. Việc trực quan hóa mối quan hệ giữa các đối tượng đỉnh và cạnh giúp học sinh hình dung bài toán tổ hợp hoặc logic phức tạp mà nếu diễn đạt bằng lời hoặc đại số thuần túy sẽ khó khăn hơn. Tuy nhiên, phương pháp đồ thị cũng bộc lộ một số hạn chế như đòi hỏi học sinh phải có nền tảng nhất định về lý thuyết đồ thị trước khi vận dụng, việc "mô hình hóa" bài toán thành ngôn ngữ đồ thị đôi khi không tự nhiên, cần kinh nghiệm, nếu chọn mô hình không phù hợp có thể làm bài toán phức tạp hơn thay vì đơn giản hơn. Bài viết đồng thời góp phần khẳng định vai trò của đồ thị học như một công cụ hiện đại trong tư duy toán học phổ thông. Tuy nhiên, bài viết chỉ mới khai thác một phần kiến thức lý thuyết đồ thị và vận dụng vào việc giải một số bài toán dành cho học sinh chuyên Toán. Do đó, vẫn còn nhiều vấn đề cần tiếp tục mở rộng nghiên cứu như các dạng bài toán tô màu, tối ưu và xác suất trên đồ thị.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2024.02.42.

Tài liệu tham khảo

- Đặng, T. S., & Lê, V. V. (2012). *Giáo trình Lý thuyết đồ thị*. TP. Hồ Chí Minh: NXB Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh.
- Green, B. (2002). Ramsey theory and the IMO. *The Mathematical Gazette*, 86(506), 204-207. <https://doi.org/10.2307/3621841>
- Holton, D. (2009). *A first step to mathematical Olympiad problems* (Volume 1). Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Lê, B. L. (2017). *Ứng dụng lý thuyết đồ thị trong giải toán phổ thông*. Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Việt Nam. Truy cập từ http://thuvien.ued.udn.vn/handle/TVDHSPDN_123456789/54417
- Lê, X. H. (2018). Sắc số, đa thức tô màu và tính duy nhất tô màu của đồ thị K_2^n . *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 30, 90-94. <https://doi.org/10.52714/dthu.30.2.2018.556>
- Lê, X. H. (2021). Về tính duy nhất 2-tô màu danh sách của đồ thị tách cực đầy đủ. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng*, 19(7), 69-72. <https://jst-ud.vn/jst-ud/article/view/7552>
- Li, S., Wu, L., Feng, S., Xu, F., Xu, F., & Zhong, S. (2020). Graph-to-tree neural networks for learning structured input-output translation with applications to semantic parsing and math word problem. *Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2020*, 2841-2852. <https://doi.org/10.18653/v1/2020.findings-emnlp.255>
- Lipovetsky, S. (2023). *Introduction to math Olympiad problems*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Ngô, Đ. T. (2004). *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Nguyễn, N. H. (2014). *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng để giải toán sơ cấp*. Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam.
- Nguyễn, T. T. G. (2008). *Rèn luyện kỹ năng vận dụng lý thuyết đồ thị vào giải toán cho học sinh chuyên tin*. Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, Việt Nam.
- Nông, T. L. (2016). *Lý thuyết đồ thị và một số dạng toán Olympic*. Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, Việt Nam.
- Rosen, K. H. (2007). *Discrete mathematics and its applications*. New York: McGraw-Hill.
- Suksompong, W. (2020). Graph cycles and Olympiad problems. *Mathematics Magazine*, 93(4), 284-287. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2020.1790966>

- Vụ Quản lý Chất lượng - Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2024). *Đề thi tham khảo Kỳ thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025*. Truy cập từ <https://vqa.moet.gov.vn/vi/news/tin-tuc-su-kien/de-thi-tham-khao-ky-thi-tot-nghiep-thpt-tu-nam-2025-159.html>
- Wahyuningsih, S., Satyananda, D., Qohar, A., & Atan, N. A. (2020). An integration of "online interactive apps" for learning application of graph theory to enhance creative problem solving of mathematics students. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM)*, 14(12), 97-109. <https://doi.org/10.3991/ijim.v14i12.15583>